Т. Н. Супрунова
Институт математики и информатики
ФГБОУ ВО «Московский педагогический
государственный университет»
Москва (Российская Федерация)
Науч. рук. – Н. И. Фирстова, к.пед.н., доцент
tn_suprunova1@student.mpgu.edu

Сюжетные задачи с целочисленными переменными

Аннотация: статья посвящена сюжетным задачам, которые решаются в целых числах. В ней представлены задачи, содержащие целочисленные переменные, с решениями.

Ключевые слова: сюжетные задачи; делимость; целочисленные переменные.

T. N. Suprunova
Institute of Mathematics and Computer Science
Moscow Pedagogical State University
Moscow (Russian Federation)
Scientific adviser – N. I. Firctova, PhD, Associate professor
tn_suprunova1@student.mpgu.edu

Plot problems with integer variables

Abstract: the article is devoted to plot problems that are solved in integers. It presents problems containing integer variables with solutions.

Keywords: plot problems; divisibility; integer variables.

Под сюжетными задачами с целочисленными переменными понимаются сюжетные задачи, при решении которых вводятся переменные, принимающие только целые значения. Причем это условие играет существенную роль для нахождения однозначного ответа. Стоит обратить внимание на еще одну особенность таких задач: количество переменных превышает количество составленных уравнений.

При решении задач в целых числах необходимо, чтобы обучающиеся освоили тему «Делимость». Обучающиеся впервые знакомятся с этой темой в 6 классе, по некоторым учебникам она изучается в 5 классе. При изучении обучающиеся узнают признаки делимости (в школьных учебниках строго не доказываются), наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное натуральных чисел, способ «решета Эратосфена» для поиска простых чисел. Перечисленные теоретические знания обучающиеся применяют для сокращения дробей, приведение дробей к общему знаменателю, а также при решении несложных сюжетных задач, если таковые входят в контекст школьных учебников. Заметим, что в силу возрастных особенностей предлагать сложные задачи, которые требуют длительного решения, сразу после изучения темы не целесообразно. Следовательно, сложные сюжетные задачи, в которых переменные могут принимать только целочисленные значения, уместно интегрировать в процесс обучения в 8–9 классах на уроках систематизации знаний после повторения опорных знаний и умений.

Проанализировав школьные учебники алгебры 9 класса следующих авторских коллективов: С.М. Никольский, М.К. Потапов и др.; Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк и др; Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др.; Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; Дорофеев Г.В. и др., можно сделать следующий вывод, что в перечисленных учебниках немного задач, которые решаются в целых числах. Для более качественной подготовки обучающихся возникает необходимость в дополнении сюжетных задач из школьного учебника задачами с целочисленными переменными. Для поиска таких задач учителю потребуются большие временные затраты, поэтому мы подобрали сюжетные задачи, которые решаются в целых числах.

Рассмотрим следующие задачи:

Задача 1

«Партия товара упакована в коробки трех типов. Вес и стоимость содержимого одной коробки составляет 6 кг и 90 тысяч рублей для первого типа, 16 кг и 280 тысяч рублей для второго типа, 7 кг и 120 тысяч рублей для третьего типа. Суммарная стоимость товара равна 3220 тысяч рублей. Определите наименьший и наибольший возможный общий вес партии товара.» (ГАУ)

Выделим структуру задачи для более полного понимания условия задачи (см. табл. 1):

Таблица 1

Структура задачи 1

Условие задачи		Требования	Оператор требования
Объекты	Отношения между объектами		
Коробки первого типа	Вес и стоимость содержимого одной коробки составляет 6 кг и 90 тысяч рублей для первого типа, 16 кг и 280 тысяч рублей для второго типа, 7 кг и 120 тысяч рублей для третьего типа. Суммарная стоимость товара равна 3220 тысяч рублей.	Определите наименьший и наибольший возможный общий вес партии товара.	Метод уравнений
Коробки второго типа			
Коробки третьего типа			

Решение:

Сравним цену за килограмм содержимого коробок и получим, что наименьшая цена за килограмм у содержимого в коробке первого типа, наибольшая цена за килограмм у содержимого в коробке второго типа. Наибольший общий вес получится при наибольшем количестве коробок первого типа, а наименьший при наибольшем количестве коробок второго типа. При решении можно ввести следующие переменные: x – количество коробок первого типа; y – количество коробок второго типа; z – количество коробок третьего типа, из условия задачи очевидно, что переменные могут принимать только целочисленные значения. В ходе решения возможно составить следующее уравнение: $9x + 28y + 12z = 322$, при анализе которого получаем, что $x \vdots 2$ и $x < 35$, подбором получаем, что $x = 30$, $y = 1$, $z = 2$, тогда 210 (кг) – наибольший возможный общий вес партии товара; $y < 12$, подбором найдем, что $y = 10$, $x = 2$, $z = 2$, тогда 186 (кг) – наименьший возможный общий вес партии товара.

Ответ: 210 кг наибольший возможный общий вес партии товара, 186 кг наименьший возможный общий вес партии товара.

Задача 2

«Три сестры пошли на рынок с цыплятами. Одна принесла на продажу 10 цыплят, другая – 16 цыплят, третья – 26 цыплят. До полудня они продали часть цыплят по одной и той же цене. После полудня, опасаясь, что не все цыплята будут проданы, они понизили цену. В результате они продали цыплят с одинаковой выручкой: каждая сестра получила от продажи 35 долларов. По какой цене они продавали цыплят до и после полудня?» (МАИ)

Выделим структуру задачи для более полного понимания условия задачи (см. табл. 2):

Таблица 2

Структура задачи 2

Условие задачи		Требования	Оператор требования
Объекты	Отношения между объектами		
Первая сестра Вторая сестра Третья сестра	Одна принесла на продажу 10 цыплят, другая – 16 цыплят, третья – 26 цыплят. До полудня они продали часть цыплят по одной и той же цене. После полудня они понизили цену. В результате они продали цыплят с одинаковой выручкой: каждая сестра получила от продажи 35 долларов.	Найти, по какой цене они продавали цыплят до и после полудня	Метод уравнений

Для решения задачи введем следующие переменные: x цыплят было продано до полудня у первой сестры; y цыплят было продано до полудня у второй сестры; z цыплят было продано до полудня у третьей сестры; a долларов – цена за одного цыпленка до полудня; b долларов – цена за одного цыпленка после полудня.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} xa + (10 - x)b = 35 \\ ya + (16 - y)b = 35 \\ za + (26 - z)b = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a - b)(x - z) = 16a \quad (1) \\ (a - b)(y - z) = 10a \quad (2) \end{cases}$$

Разделим (1) на (2), так как $a \neq 0$, и получим:

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{8}{5}$$

Используя свойство пропорции, получаем:

$$\frac{x - z}{8} = \frac{y - z}{5}$$

Замена: $\frac{x-z}{8}=\frac{y-z}{5}=t$

$x=8t+z$, но $x<10$

$t=1$, $z=1$, тогда $x=8\cdot 1+1=9$

Обратная замена: $\frac{y-1}{5}=1$, следовательно, $y=6$

Возвращаемся к исходной системе и подставляем в нее полученные значения: $x=9$, $y=6$, $z=1$

$$\begin{cases} 9a+b=35 \\ 6a+10b=35 \\ a+25b=35 \end{cases}$$

Решим систему методом подстановки и получим, что $a=3{,}75, b=1{,}25$.

Ответ: 3, 75 долларов до полудня, 1,25 долларов после полудня.

Задача 3:

«Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов А и В общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида А была больше цены одной акции вида В. К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определите цену продажи одной акции вида А и вида В.» (МВШ)

Выделим структуру задачи для более полного понимания условия задачи (см. табл. 3):

Таблица 3

Структура задачи 3

Условие задачи		Требования	Оператор требования
Объекты	Отношения между объектами		
Первый брокер Второй брокер Третий брокер	Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов А и В общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида А была больше цены одной акции вида В. К концу торгового дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый.	Определите цену продажи одной акции вида А и вида В	Метод уравнений

Решение:

Обозначим x – количество акций вида А в начале дня у первого брокера; y – количество акций вида А в начале дня у второго брокера; z – количество акций вида А в начале дня у третьего брокера; $(11 - x)$ – количество акций вида В в начале дня у первого брокера; $(21 - y)$ – количество акций вида В в начале дня у второго брокера; $(29 - z)$ – количество акций вида В в начале дня у третьего брокера; p – цена на акции вида А; q – цена на акции вида В.

$$\begin{cases} px + q(11 - x) = 4402 \\ py + q(21 - y) = 4402 \\ pz + q(29 - z) = 4402 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p - q)x + 11q = 4402 \\ (p - q)y + 21q = 4402 \\ (p - q)z + 29q = 4402 \end{cases}$$

Вычитая третье уравнение из первого и второго, получаем следствие:

$$\begin{cases} (p - q)(x - z) = 18q \\ (p - q)(y - z) = 8q \end{cases}$$

Поскольку из условия $p > q > 0$ следует, что $x - z > 0$ и $y - z > 0$.

После деления первого из получившихся уравнений на второе, получим:

$$4(x - z) = 9(y - z)$$

Используя целочисленность переменных, получаем:

$$x = z + 9n, y = z + 4n, \text{где } n \in N.$$

Так как $11 > x = z + 9n > z > 0$, то $z = 1, n = 1$. Поэтому $x = 10, y = 5$, обращаясь к исходной системе, находим, что $p = 426, q = 142$.

Ответ: 426 руб. цена продажи акции вида А; 142 руб. цена продажи акции вида Б.

Для обучения решению таких задач необходимо обратить внимание обучающихся на тему «Делимость», а также на то, что в задачах количество переменных превышает количество составленных уравнений. Решая такие задачи, можно выделить ряд косвенных признаков, определенных условиями задачи, по которым возможно получить однозначное решение.

Литература:

1. *Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.* Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Вентана-Граф. 2014. 304 с.
2. *Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др.* Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций. 3-е изд. М. : Просвещение. 2016. 336 с.
3. *Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.* Алгебра. 9 класс: Учебник для общеобразовательных организаций. М.: Просвещение. 2019. 335.
4. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. и др.; под ред. Теляковского.* Алгебра. Учеб. для 9 класса средней школы. М.: Просвещение. 2017. 287 с.
5. *Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В. и др.* Алгебра 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение. 2012. 287 с.
6. *Фирстова Н.И., Кийко С.И.* Алгебра. 8 класс. Новые дидактические материалы для углубленного изучения математики. - М.: Интеллект-Центр. 2020. 32 с.
7. *Фридман Л.М.* Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика. Учеб. пособие для учителей и студенто в педвузов и колледжей. М.: Школьная Пресса. 2002. 204 с.