Тимофеева И. Л.,
доктор педагогических наук, профессор,
профессор кафедры математического анализа,
Институт математики и информатики,
Московский педагогический
государственный университет;
iltimofeeva@mail.ru
Артемьева Е. А.,
студент 4 курса
Институт математики и информатики,
Московский педагогический
государственный университет;
artemeva220601@gmail.com

Об анализе логической структуры определений при изучении функций в школьном курсе математики

Аннотация: в статье проанализирована логическая структура определений наиболее важных понятий, связанных с числовыми функциями; представлены записи этих определений с использованием логических символов; отмечены типичные ошибки логического характера, допускаемые учащимися при формулировании этих определений.

Ключевые слова: определение, функция, ограниченная функция, наименьшее значение функции, наибольшее значение функции, четная функция, нечетная функция, периодическая функция, кванторы, логические символы.

Timofeeva I. L.,
ScD in Education, Full Professor,
Professor, Mathematical Analysis Department,
Institute of Mathematics and Computer Science,
Moscow Pedagogical State University
iltimofeeva@mail.ru
Artemeva E. A.,
4th year student,

Institute of Mathematics and Computer Science,
Moscow Pedagogical State University
artemeva220601@gmail.com

On logical structure of definitions in studying of functions in school mathematics course

Abstract: the article analyzes logical structure of definitions of the most important concepts related to numerical functions; records of these definitions using logical symbols are presented; typical logical mistakes made in study of these definitions are noted.

Keywords: definition, function, bounded function, smallest value of function, largest value of function, even function, odd function, periodic function, quantifiers, logical symbols.

Изучение определений играет важную роль в обучении математике. Многие определения имеют непростую логическую структуру. Выявление логической структуры изучаемого определения способствует более глубокому усвоению учащимися смысла этого определения. Для наглядного представления логической структуры определения будем использовать логическую символику при записи этого определения или его определяющей части. Проблемам оперирования определениями, в частности проблемам использования логической символики при работе с определениями, посвящены работы [1], [3], [4], [5], [7].

В этой статье мы ограничимся анализом логической структуры определений важных понятий, связанных с числовыми функциями. Будем рассматривать определения, приведенные в учебнике [2].

Авторы учебника [2] используют для обозначения произвольной функции букву f или равенство $y = f(x)$. Для обозначения произвольного множества, на котором функция определена, используют букву X, а для обозначения максимальной («полной») области определения («области существования») – символ $D(f)$.

1. Определение ограниченной функции.

Авторы вводят три понятия, связанных с ограниченностью функции: ограниченность сверху/снизу и ограниченность функции на множестве. Проанализируем логическую структуру соответствующих определений.

«Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют **ограниченной снизу** на множестве X, если существует число A, такое, что $A \le f(x)$ для любого $x \in X$» [2, с. 6].

Это определение имеет непростую логическую структуру, поскольку в нем используются два кванторных слова (квантора) – «существует» и «для любого».

Подразумевая, что $X \subseteq D(f)$, с помощью логических символов это определение можно записать так:

$$f \text{ ограничена снизу на } X \overset{def}{\longleftrightarrow} \exists A \, \forall x \in X \, (A \le f(x)). \tag{1}$$

Учащиеся часто допускают следующую ошибку: они меняют местами разноименные кванторы в определяющей части, получая условие $\forall x \in X \, \exists A \left(A \le f(x)\right)$, имеющее совсем другой смысл. Учащимся следует объяснить, что этому условию удовлетворяет, например, функция $f(x) = x$, определенная на множестве всех действительных чисел **R**, поскольку для любого действительного x найдется такое A, что $A \le x$, т. е. $A \le f(x)$ (например, $A = x - 1$). Однако, в действительности, функция $f(x) = x$ ограниченной снизу не является, поскольку не удовлетворяет определяющему условию определения (1): $\exists A \, \forall x \in X \left(A \le f(x)\right)$. Учащихся можно попросить привести другой пример.

Аналогичная ситуация со следующим определением:

«Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют **ограниченной сверху** на множестве X, если существует число B, такое, что $f(x) \le B$ для любого $x \in X$» [2, с. 6].

Подразумевая, что $X \subseteq D(f)$, с помощью логических символов это определение можно записать так:

$$f \text{ ограничена сверху на } X \overset{def}{\longleftrightarrow} \exists B \, \forall x \in X \, (f(x) \le B). \tag{2}$$

Наконец, «Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, называют **ограниченной** на множестве X, если существует число $M > 0$, такое, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$» [2, с. 6].

Подразумевая, что $X \subseteq D(f)$, с помощью логических символов это определение можно записать так:

$$f \text{ ограничена на } X \overset{def}{\longleftrightarrow} \exists M > 0\ \forall x \in X\ (|f(x)| \leq M). \qquad (3)$$

Работать над двумя последними определениями следует также, как и над первым.

2. Определения наибольшего и наименьшего значений функции на множестве.

«Про функцию $y = f(x)$ говорят, что она принимает на множестве X **наименьшее значение** в точке x_0, если $x_0 \in X$ и $f(x_0) \leq f(x)$ для всех $x \in X$» [2, с. 6].

Подразумевая, что $X \subseteq D(f)$, с помощью логических символов определяющее условие этого определения можно записать так:

$$x_0 \in X\ \&\ \forall x \in X\ (f(x_0) \leq f(x)). \qquad (4)$$

Очевидно, что определяющее условие представляет собой конъюнкцию двух предложений, из которых второе содержит квантор общности.

Заметим, что авторы не добавляют, что при выполнении условия (4) число $f(x_0)$ называют наименьшим значением функции на множестве X. Кроме того, авторы в этом определении уже не повторяют, что функция $y = f(x)$ определена на множестве X, т.е. $X \subseteq D(f)$, но, безусловно, это подразумевают.

Далее авторы предлагают следующее определение:

«Говорят, что функция $y = f(x)$ принимает на множестве X **наибольшее значение** в точке x_0, если $x_0 \in X$ и $f(x_0) \geq f(x)$ для всех $x \in X$» [2, с. 6].

Подразумевая, что $X \subseteq D(f)$, с помощью логических символов определяющее условие этого определения можно записать так:

$$x_0 \in X\ \&\ \forall x \in X\ (f(x_0) \geq f(x)) \qquad (5)$$

В этих двух определениях учащиеся допускают следующие ошибки: пропускают условие $x_0 \in X$, теряют квантор общности во втором члене конъюнкции, а также забывают проверить условие $X \subseteq D(f)$.

Каждую из этих ошибок следует обсудить с учащимися, привести соответствующий контрпример.

3. Определения четной функции и нечетной функции.

Авторы учебника [2] формулируют определение четной функции так:

«Функцию $y = f(x)$ с областью определения X называют **четной**, если для любого $x \in X$ число $(-x) \in X$ и справедливо равенство $f(-x) = f(x)$» [2, с. 8].

Подразумевая, что $X = D(f)$, с помощью логических символов это определение можно записать так:

$$f \text{ – четная функция} \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x \in X \left((-x) \in X \ \& \ f(-x) = f(x)\right). \qquad (6)$$

В определяющем условии область действия квантора общности представляет собой конъюнкцию двух членов.

Учащиеся допускают следующие ошибки: теряют квантор общности, относят его только к первому члену конъюнкции, теряют первый член конъюнкции. Эти ошибки отмечены в статьях [1] и [4].

«Функцию $y = f(x)$ с областью определения X называют **нечетной**, если для любого $x \in X$ число $(-x) \in X$ и справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$» [2, с. 8].

Подразумевая, что $X = D(f)$, с помощью логических символов это определение можно записать так:

$$f \text{ – нечетная функция} \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x \in X \left((-x) \in X \ \& f(-x) = -f(x)\right). \qquad (7)$$

Учащиеся при формулировке этого определения допускают аналогичные ошибки.

4. Определение периодической функции.

«Функцию $y = f(x)$ с областью определения X называют **периодической**, если существует число $T \neq 0$, такое, что для любого $x \in X$ число $(x + T) \in X$, число $(x - T) \in X$ и справедливо равенство $f(x + T) = f(x)$» [2, с. 9].

Подразумевая, что $X = D(f)$, с помощью логических символов определяющее условие этого определения можно записать так:

$$\exists T \neq 0 \ \forall x \in X \left(((x + T) \in X) \ \& \ ((x - T) \in X) \ \& \left(f(x + T) = f(x)\right)\right). \qquad (8)$$

Это предложение содержит два разноименных квантора, область действия квантора общности представляет собой конъюнкцию трех членов.

Учащиеся допускают следующие ошибки: теряют кванторы, переставляют разноименные кванторы, относят кванторы только к первым двум членам конъюнкции, теряют члены конъюнкции или добавляют лишние.

5. Определения возрастающей/убывающей на промежутке функции.

«Функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке X, называют **возрастающей** на этом промежутке, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$» [2, с. 14].

Подразумевая, что X – промежуток и $X \subseteq D(f)$, с помощью логических символов это определение можно записать так:

f возрастает на $X \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x_1 \in X \; \forall x_2 \in X \; (x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$. (9)

Определяющее условие этого определения содержит два квантора общности по переменным x_1 и x_2, а также импликацию с посылкой $x_1 < x_2$ и заключением $f(x_1) < f(x_2)$.

Кванторы общности по переменным x_1 и x_2 играют важную роль и не могут быть опущены в этом определении. Однако опускание этих кванторов в рассматриваемом определении является распространенной ошибкой, допускаемой не только учащимися, но и авторами некоторых учебников, что отмечает И.Л. Тимофеева в статье [4, с. 145]. В этой статье на примере определения возрастающей функции рассмотрены проблемы логического характера, связанные с некорректным опусканием кванторов в определениях.

Кроме того, учащиеся могут допустить ошибку, отнеся кванторы общности только к посылке импликации, грубо искажая смысл определения. С учащимися следует обсудить указанные ошибки.

Далее в учебнике [2] представлено определение убывающей на промежутке функции: «Функцию $y = f(x)$, определенную на промежутке X, называют **убывающей** на этом промежутке, если для любой пары чисел x_1 и x_2 из этого промежутка из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$» [2, с. 14].

Подразумевая, что X – промежуток и $X \subseteq D(f)$, с помощью логических символов это определение можно записать так:

f убывает на $X \overset{def}{\longleftrightarrow} \forall x_1 \in X \; \forall x_2 \in X \; (x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2))$. (10)

Это определение имеет такую же логическую структуру, что и предыдущее определение. Допускаемые ошибки при формулировке тоже аналогичны.

Аналогично обстоит дело и с определениями неубывающей и невозрастающей на промежутке функции.

Отметим, что все перечисленные выше логические ошибки, допускаемые учащимися при формулировке рассмотренных определений, вызваны нарушениями логических норм конструирования определений, систематизированных в статье [6].

Сделаем некоторые выводы.

1. Анализ логического строения определений является важной частью работы с определениями, поскольку способствует глубокому усвоению смысла определений.

2. Запись определения или его определяющего условия с использованием логических символов позволяет наглядно отразить логическое строение определяющего условия и определения в целом. Однако использовать логическую символику можно только в рамках курса по выбору или при углубленном изучении математики.

3. С учащимися целесообразно обсудить типичные логические ошибки, допускаемые при формулировке определений (опускание кванторов, перестановка разноименных кванторов, неправильное указание области действия кванторов в определяющем условии и др.). Важно объяснить недопустимость этих ошибок, приводя соответствующие примеры.

4. Все сказанное выше относится к работе над определениями не только со школьниками, но и со студентами педвузов – будущими учителями математики.

Литература

1. *Болтянский В.Г.* Использование логической символики при работе с определениями // Математика в школе, 1973. № 5. С. 45–50.
2. *Никольский С.М.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников и др. 2-е изд. М.: Просвещение, 2016. 464 с. (МГУ – школе).
3. *Тимофеева И.Л., Сергеева И.Е., Лукьянова Е.В.* Вводный курс математики: учебное пособие для студентов учреждений высшего педагогического профильного образования. М.: Издательский центр «Академия», 2011. 240 с.

4. *Тимофеева И.Л.* Об использовании кванторов в определениях школьного курса математики // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2015. № 8. С. 140–146.
5. *Тимофеева И.Л.* Размышления об определениях четной и нечетной функции в школьном курсе математики // Наука и школа, 2016. № 4. С. 168–174.
6. *Тимофеева И.Л.* Систематизация логических норм конструирования математических определений / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева // Материалы Международной научной конференции «Математическое образование: современное состояние и перспективы», посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.А. Столяра. Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2019. С. 19–23.
7. *Тимофеева И.Л.* О логическом оперировании математическими теоремами и определениями / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева // Материалы международной научно-практической интернет-конференции «Актуальные проблемы методике обучения информатике и математике в современной школе», г. Москва, 18-24 апреля 2022 г. / под ред. Л.Л. Босовой, Д.И. Павлова [Электронное издание сетевого распространения]. М.: МПГУ, 2022. С. 594–602.