Секованов В.С.,
доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и
информационных технологий,
Костромской государственный университет (КГУ);
sekovanovvs@yandex.ru
Стрункина К.Ю.,
преподаватель,
Военная Академия радиационной, химической и биологической защиты
имени маршала Советского Союза С. К. Тимошенко;
strunkina.ksyu@mail.ru
Краснова Т.Д.,
магистрант 2-го курса,
Костромской государственный университет (КГУ);
tanyakrasn99@bk.ru
Селезнева Е.М.,
старший преподаватель,
Костромской государственный университет (КГУ);
lena_selez@mail.ru
Татанов А.М.
магистрант 1-го курса,
Костромской государственный университет (КГУ);
a.m.tatanov@mail.ru

Изучение структуры неподвижных точек полинома пятой степени как средство развития креативности студентов

Аннотация: в настоящей работе исследована динамика поведения семейства функций $f_c(z) = z^5 + c$, а так же рассмотрены некоторые случаи структуры неподвижных точек указанного семейства. Кроме того, в статье описывается влияние изучения данной темы на развитие креативности студентов, приводятся методические рекомендации по эффективной подаче рассматриваемого материала. Содержание статьи может быть использовано преподавателями математических и информационных дисциплин, а также студентами различных направлений подготовки.

Ключевые слова: структура неподвижных точек, семейство функций, креативность, множество Жюлиа.

Sekovanov V.S.,
Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics,
Kostroma State University (KSU);
sekovanovvs@yandex.ru
Strunkina K.Yu.,
teacher,
Military Academy of Radiation, Chemical and Biological Protection named after Marshal of the Soviet Union S. K. Timoshenko;
strunkina.ksyu@mail.ru
Krasnova T.D.,
2nd year master's student,
Kostroma State University (KSU);
tanyakrasn99@bk.ru
Selezneva E.M.,
Senior Lecturer,
Kostroma State University (KSU);
lena_selez@mail.ru
Tatanov A.M.
1st year master's student,
Kostroma State University (KSU);
a.m.tatanov@mail.ru

Studying the structure of fixed points of a polynomial of the fifth degree as a means of developing students' creativity

Abstract: in this paper, the dynamics of the behavior of the family of functions $f_c(z) = z^5 + c$ is studied, as well as some cases of the structure of fixed points of the specified family. In addition, the article describes the impact of studying this topic on the development of students' creativity, provides guidelines for the effective presentation of the material under consideration. The content of the article can be used by teachers of mathematical and information disciplines, as well as students of various fields of study.

Keywords: structure of fixed points, family of functions, creativity, Julia set.

В настоящее время активно развивается новое направление науки – голоморфная динамика. Важнейшими понятиями голоморфной динамики являются понятия неподвижной периодической точки, бассейна притяжения, множества Жюлиа, множество Мандельброта. Например, структура неподвижных точек полиномов второй и третьей степеней и их множества Жюлиа исследованы в источниках [1], [2], [4].

В настоящей работе мы будем исследовать динамику поведения полинома

$$f_c(z) = z^5 + c \qquad (1),$$

а также рассмотрим отдельные случаи структуры его неподвижных точек.

При изучении данной темы у обучаемых развиваются гибкость мышления, интуиция, стремление к интеллектуальной новизне, являющиеся важнейшими креативными качествами личности.

Пусть дано семейство функций $f_c(z) = z^5 + c$. Введем следующие обозначения: P – притягивающая неподвижная точка, N – нейтральная неподвижная точка, O – отталкивающая неподвижная точка. Будем считать, что семейство функций $f_c(z) = z^5 + c$ имеет пять неподвижных притягивающих точек и писать (P P P P P) (соответственно, к примеру, если семейство имеет одну притягивающую неподвижную точку и четыре нейтральные, то будем писать (P N N N N)). Аналогично определяются случаи (P O O O O), (N N N N N), (P P O O N) и т.д. Всего имеется 21 вариант (см. табл. 1).

Таблица 1

Структура неподвижных точек полинома $f_c(z) = z^5 + c$

1	*O O O O O*	8	*O O O N N*	15	*N P P P P*
2	*O O O O P*	9	*O O N N N*	16	*O N N N P*
3	*O O O P P*	10	*O N N N N*	17	*O N N P P*
4	*O O P P P*	11	*N N N N N*	18	*O N P P P*
5	*O P P P P*	12	*N N N N P*	19	*O O N N P*
6	*P P P P P*	13	*N N N P P*	20	*O O N P P*
7	*O O O O N*	14	*N N P P P*	21	*O O O N P*

Замечание 1. Мы не берем в расчет порядок следования неподвижных точек одного типа, содержащихся в тетраде. Например, тетрады (O O O N P) и (O N O O P) мы не различаем.

Замечание 2. Если мы выявили значение c, при котором характер неподвижных точек функции описывает определенная диада, например, ($P\ O\ O\ O\ O$), то для краткости изложения, будем говорить, что имеет место случай ($P\ O\ O\ O\ O$) или выполняется условие ($P\ O\ O\ O\ O$).

Исследуем структуру неподвижных точек семейства функций $f_c(z) = z^5 + c$. Каждая неподвижная точка удовлетворяет уравнению:

$$z^5 - z + c = 0 \quad (2).$$

Пусть z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 – корни данного уравнения. Согласно формулам Виетта имеем:

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3+z_4+z_5=0 \\ z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_1z_5+z_2z_3+z_2z_4+z_2z_5+z_3z_4+z_3z_5+z_4z_5=0 \\ z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_2z_5+z_1z_3z_4+z_1z_3z_5+z_1z_4z_5+z_2z_4z_5 + z_3z_4z_5+z_2z_3z_4+z_2z_3z_5 = 0 \\ z_1z_2z_3z_4+z_1z_2z_3z_5+z_1z_2z_4z_5+z_2z_3z_4z_5+z_1z_3z_4z_5=-1 \\ z_1z_2z_3z_4z_5=-c \end{cases} \quad (3).$$

Очевидно, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 и z_5 являются неподвижными точками семейства функций (1).

Заметим, что

$$f_c'(z) = 5z^4 \quad (4).$$

Из определения отталкивающих, притягивающих и нейтральных неподвижных точек имеем:

•z_i – отталкивающая неподвижная точка семейства функций (1), если

$$\left|5z_i^4\right| > 1, \text{ т.е. } |z_i| > \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \quad (5);$$

•z_i – притягивающая неподвижная точка семейства функций (1), если

$$\left|5z_i^4\right| < 1, \text{ т.е. } |z_i| < \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \quad (6);$$

•z_i –нейтральная неподвижная точка семейства функций (1), если

$$\left|5z_i^4\right| = 1, \text{ т.е. } |z_i| = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \quad (7).$$

Обратимся к источнику [4]. В пункте «2.3. Структура неподвижных точек полиномов» доказывается Предложение 6, которое значительно облегчит исследование структуры неподвижных точек семейства функций (1).

Предложение 6.

Функция $f(z) = z^5 + c$ ни при каком значении c не может иметь более одной притягивающей неподвижной точки.

Таким образом, сразу очевидна невозможность следующих случаев: 3, 4, 5, 6, 13, 14, 15, 17, 18, 20 (см. табл. 1).

Далее рассмотрим наиболее сложные варианты структуры неподвижных точек исходного семейства функций. Они могут служить образцами (подсказками) для дальнейших самостоятельных исследований студентами.

Рассмотрим случай 11 (см. табл. 1) и покажем, что для семейства функций (1) наличие пяти неподвижных нейтральных точек невозможно.

Предположим противное, что имеется такое c, при котором все пять неподвижных точек - z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 – нейтральные. Тогда получим:

$$|c| = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{5}} = \frac{1}{5\sqrt[4]{5}} \qquad (8).$$

Из формулы (2) для каждой неподвижной точки z_i $(i = 1,2,3,4,5)$ имеем:

$$\left|z_i - {z_i}^5\right| = |c| \qquad (9).$$

Следовательно, для каждого z_i $(i = 1,2,3,4,5)$ будет иметь место:

$$\frac{1}{5\sqrt[4]{5}} = |c| = \left|{z_i}^5 - z_i\right| \geq |z_i| - \left|{z_i}^5\right| = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} - \frac{1}{5\sqrt[4]{5}} = \frac{4}{5\sqrt[4]{5}} \qquad (10).$$

Пришли к противоречию $\frac{1}{5\sqrt[4]{5}} \geq \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$. Следовательно, наше предположение неверно, не найдется такого c, что семейство функций $f_c(z) = z^5 + c$ будет иметь пять неподвижных нейтральных точек.

Покажем, что не имеет места случай 10 (см. табл. 1) – $(O\ N\ N\ N\ N)$ – одна отталкивающая неподвижная точка и четыре нейтральные.

Предположим противное, что имеется такое c, при котором неподвижные точки z_1, z_2, z_3, z_4 – нейтральные, а z_5 – отталкивающая.

Отметим, что для рассматриваемого случая $z_i \neq 0$ $(i = 1,2,3,4,5)$ (см. формулы 5, 7).

Из равенства (2) получим:

$$z^4 + \frac{c}{z} = 1 \text{ или } z^4 = 1 - \frac{c}{z} \qquad (11).$$

Таким образом, подставив в последнее равенство в производную, будем иметь:

$$f'(z) = 5 - \frac{5c}{z} \qquad (12).$$

Далее выполним следующие преобразования, воспользовавшись формулами (3):

$$\left|\left(5 - \frac{5c}{z_1}\right) + \left(5 - \frac{5c}{z_2}\right) + \left(5 - \frac{5c}{z_3}\right) + \left(5 - \frac{5c}{z_4}\right) + \left(5 - \frac{5c}{z_5}\right)\right| = |25 -$$

$$-5(z_2z_3z_4z_5 + +z_1z_3z_4z_5 + z_1z_2z_4z_5 + z_1z_2z_3z_5 + z_1z_2z_3z_4)| = 30 \ (13).$$

$$30 = \left|\left(5 - \frac{5c}{z_1}\right) + \left(5 - \frac{5c}{z_2}\right) + \left(5 - \frac{5c}{z_3}\right) + \left(5 - \frac{5c}{z_4}\right) + \left(5 - \frac{5c}{z_5}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|5-\frac{5c}{z_1}\right|+\left|5-\frac{5c}{z_2}\right|+\left|5-\frac{5c}{z_3}\right|+\left|5-\frac{5c}{z_4}\right|+\left|5-\frac{5c}{z_5}\right| \leq 4+\left|5-\frac{5c}{z_5}\right| \quad (14).$$

Заметим, что (см. формулу 7):

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=|z_5|=\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \quad (15).$$

Далее имеем:

$$\left|5-\frac{5c}{z_5}\right|=|5-5z_1z_2z_3z_4| \leq 5+5|z_1||z_2||z_3||z_4| < 5+5\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\frac{1}{\sqrt[4]{5}}=$$
$$=5+1=6 \quad (16).$$

Из формул (14) и (16) получим:

$$30 \leq 4+\left|5-\frac{5c}{z_5}\right| < 4+6=10 \quad (17).$$

Таким образом, мы пришли к противоречию, поскольку получили, что $30 < 10$. Следовательно, наше предположение неверно, не найдется такого c, что семейство функций $f_c(z)=z^5+c$ будет иметь одну отталкивающую неподвижную точку и четыре нейтральные.

Покажем, что отсутствует случай 21 (см. табл. 1) – ($O\ O\ O\ N\ P$) - три отталкивающие неподвижные точки, одна нейтральная и притягивающая точки.

Предположим противное. Пусть данная функция имеет пять неподвижных точек: z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, где z_1 – неподвижная нейтральная точка, z_2 – притягивающая неподвижная точка, z_3, z_4, z_5 – неподвижные отталкивающие точки. Тогда из формул (5), (6), (7) получим: $|z_1|=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, |z_2|<\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, |z_3|>\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, |z_4|>\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, |z_5|>\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$.

Заметим, что:

$$|z_1+z_2| \leq |z_2|+|z_2| < \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \quad (18).$$

Из второго равенства формул (3) находим:

$$z_3z_4+z_3z_5+z_4z_5=z_1(-z_2-z_3-z_4-z_5)+z_2(-z_3-z_4-z_5) \quad (19).$$

Далее из формул (3) получаем:

$$|z_3z_4+z_3z_5+z_4z_5|=|z_1(-z_2-z_3-z_4-z_5)+z_2(-z_3-z_4-z_5)|=$$
$$=|z_1^2-z_2(z_1+z_2)| < |z_1^2|+|z_2(z_1+z_2)| < \frac{1}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^2}+\frac{2}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^2}=\frac{3}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^2} \quad (20).$$

Далее, воспользовавшись равенствами формул (3), выполним следующую серию преобразований:

$$z_2=-z_1-z_3-z_4-z_5 \quad (21);$$

$$z_2^2 = -z_1z_2 - z_2z_3 - z_2z_4 - z_2z_5 \quad (22);$$
$$z_2^2 = z_1z_3 + z_1z_4 + z_1z_5 + z_3z_4 + z_4z_5 \quad (23);$$
$$z_2^3 = z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_2z_5 + z_2z_3z_4 + z_2z_4z_5 \quad (24);$$
$$z_2^3 = -z_1z_3z_4 - z_1z_3z_5 - z_1z_4z_5 - z_3z_4z_5 \quad (25);$$
$$z_2^4 = -z_1z_2z_3z_4 - z_1z_2z_3z_5 - z_1z_2z_4z_5 - z_2z_3z_4z_5 \quad (26);$$
$$z_2^4 = 1 + z_1z_3z_4z_5 \quad (27).$$

Покажем теперь, что выполняется следующее неравенство:

$$|z_3z_4z_5| < \frac{4}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^3} \quad (28).$$

Из равенства (25) получим:

$$z_3z_4z_5 = -z_2^3 - z_1(z_3z_4 + z_3z_5 + z_4z_5);$$
$$|z_3z_4z_5| \le \left|z_2^3\right| + |z_1||z_3z_4 + z_3z_5 + z_4z_5| < \frac{1}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^3} + \frac{3}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^3} = \frac{4}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^3} \quad (29).$$

Из равенства (27) и неравенств (29) получим:

$$|z_2^4| \ge 1 - |z_1||z_2z_3z_4| > 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \quad (30).$$

Поскольку точка z_2 – неподвижная *притягивающая* точка, то имеют место неравенства:

$$|z_2^4| < \left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^4 = \frac{1}{5} \quad (31).$$

Неравенства (29) и (30) показывают, что мы пришли к противоречию:

$$\frac{1}{5} < |z_2^4| < \frac{1}{5} \quad (32).$$

То есть предположение, что функция $f_c(z) = z^5 + c$ имеет три отталкивающие неподвижные точки, одну нейтральную и притягивающую точки при некотором $c \in C$, оказалось ошибочным.

Как показывает практика, доказательство того, что некоторый случай Таблицы 1 не имеет места быть, требует немалого времени и серьезных математических навыков. Для исследования подобных вещей недостаточно одних академических математических знаний, необходимо использовать математическую интуицию, отказаться от сложившихся стереотипов, в некоторых случаях нужно даже «включить» фантазию.

Поскольку задания подобного характера очень затратные по времени, то мы рекомендуем оформить их в виде индивидуальных или групповых проектов, разделив случаи, приведенные в Таблице 1, на примерно равные части. В конце же отведенного на задание времени результаты всех групп рекомендуется объединить в общую систему.

Рассмотрим теперь случай, для которого существует c, удовлетворяющее необходимому условию.

Исследуем случай 8 (см. табл. 1) и покажем, что при $c = \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ рассматриваемое семейство функций (1) будет иметь 3 отталкивающие неподвижные точки и 2 нейтральные.

При $c = \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ исходное семейство функций примет вид:

$$f_c(z) = z^5 + \frac{4}{5\sqrt[4]{5}} \qquad (33).$$

Неподвижные точки полученного полинома найдем из уравнения:

$$z^5 - z + \frac{4}{5\sqrt[4]{5}} = 0 \qquad (34).$$

Разложим левую часть равенства на множители, для этого выполним деление «уголком» многочлена $z^5 - z + \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ на $z - \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$:

$$\left(z - \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)\left(z^4 + \frac{z^3}{\sqrt[4]{5}} + \frac{z^2}{\sqrt{5}} + \frac{z}{\sqrt[4]{5^3}} - \frac{4}{5}\right) = 0 \qquad (35).$$

Далее выполним деление «уголком» многочлена $z^4 + \frac{z^3}{\sqrt[4]{5}} + \frac{z^2}{\sqrt{5}} + \frac{z}{\sqrt[4]{5^3}} -$ $- \frac{4}{5}$ на $z - \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$. В итоге исходное уравнение примет вид:

$$\left(z - \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^2 \left(z^3 + \frac{2z^2}{\sqrt[4]{5}} + \frac{3z}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt[4]{125}}\right) = 0 \qquad (36).$$

Первый множитель дает два совпадающих корня:

$$z_1 = z_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \qquad (37).$$

Выясним характер неподвижных точек z_1 и z_2. Т. к. $|z_1| = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ и $|z_2| = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$, то по ранее сделанным выводам (см. формулу 7) заключаем, что z_1 и z_2 – нейтральные неподвижные точки.

Рассмотрим второй множитель полученного уравнения:

$$z^3 + \frac{2z^2}{\sqrt[4]{5}} + \frac{3z}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt[4]{125}} = 0 \qquad (38).$$

Корни данного кубического уравнения z_3, z_4, z_5 удовлетворяют формулам Виетта:

$$\begin{cases} z_3 + z_4 + z_5 = -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \\ z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_4 z_5 = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ z_3 z_4 z_5 = -\frac{4}{\sqrt[4]{125}} \end{cases} \quad (39).$$

Проведем оценку корней. Для начала выясним, имеет ли полученное уравнение действительные корни, для этого найдем производную и критические точки соответствующей функции $f(z) = z^3 + \frac{2z^2}{\sqrt[4]{5}} + \frac{3z}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt[4]{125}}$:

$$f'(z) = 3z^2 + \frac{4z}{\sqrt[4]{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} \quad (40);$$

$$3z^2 + \frac{4z}{\sqrt[4]{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = 0 \quad (41);$$

$$D = \frac{16}{\sqrt{5}} - \frac{36}{\sqrt{5}} = -\frac{20}{\sqrt{5}} < 0 \quad (42).$$

Производная не обращается в 0 ни при одном $z \in \mathbb{R}$, т.к. $D < 0$. Следовательно, исследуемая функция $f(z) = z^3 + \frac{2z^2}{\sqrt[4]{5}} + \frac{3z}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt[4]{125}}$ не имеет критических точек, она возрастает при любом $z \in \mathbb{R}$.

Изобразив схематично график исследуемой функции, можно обнаружить что он пересекает ось *Ox* в одной точке, ордината которой равна нулю. Следовательно, исходное уравнение имеет один действительный корень z_3. Проведем его оценку:

$$f(-1) = -1 + \frac{2}{\sqrt[4]{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt[4]{125}} > 0 \quad (43);$$

$$f(-2) = -8 + \frac{8}{\sqrt[4]{5}} - \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt[4]{125}} < 0 \quad (44).$$

Таким образом, можем сделать вывод:

$$-2 < z_3 < -1 \text{ или } 1 < |z_3| < 2 \quad (45).$$

По ранее сделанным выводам (см. формулу 5) заключаем, что z_3 – отталкивающая неподвижная точка.

Далее проведем оценку оставшихся корней z_4, z_5. Из третьего выражения формул (39) имеем:

$$|z_3 z_4 z_5| = \frac{4}{\sqrt[4]{125}} \quad (46);$$

$$|z_4 z_5| = \frac{4}{|z_3|\sqrt[4]{125}} \quad (47);$$

$$|z_4|^2 = |z_4 z_5| = \frac{4}{|z_3|\sqrt[4]{125}} = \frac{4\sqrt[4]{5}}{5|z_3|} > \frac{4\sqrt[4]{5}}{10} \approx 0{,}6 \qquad (48).$$

Т.к. z_4 и z_5 – сопряженные корни, имеем:

$$z_4 = a + bi, z_5 = a - bi, z_4 z_5 = a^2 + b^2 \qquad (49);$$

$$|z_4| = |z_5| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (50);$$

$$|z_4|^2 = |z_5|^2 = a^2 + b^2 > 0{,}6 \qquad (51);$$

$$|z_4| = |z_5| > 0{,}7 > \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \qquad (52).$$

Следовательно, z_4 и z_5 – отталкивающие неподвижные точки (см. формулы 5).

Итак, мы показали, что имеет место случай 8 (см. табл. 1): при $c = \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ рассматриваемое семейство функций $f_c(z) = z^5 + c$ будет иметь 3 отталкивающие неподвижные точки и 2 нейтральные.

В статье рассмотрены не все случаи, указанные в Таблице 1. Мы намеренно привели только избранные исследования, дав возможность читателям самим попробовать свои силы в решении подобных задач.

Кроме приведенных ранее задач, с целью реализации метапредметных связей, рекомендуем предложить студентам разработать алгоритм построения множества Жюлиа для найденного полинома (33).

Полученное множество должно иметь следующий вид (см. рис. 1):

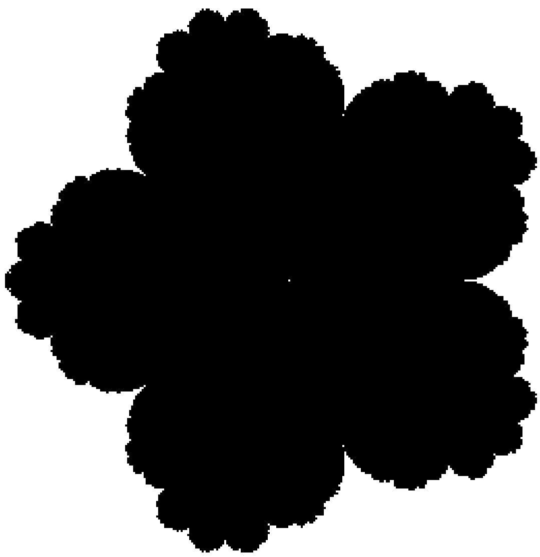

Рис. 1. Заполняющее множество Жюлиа полинома

$$f_c(z) = z^5 + \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$$

Слабым студентам можно предложить фрагмент блок-схемы искомого алгоритма, продемонстрированный на рис. 2.

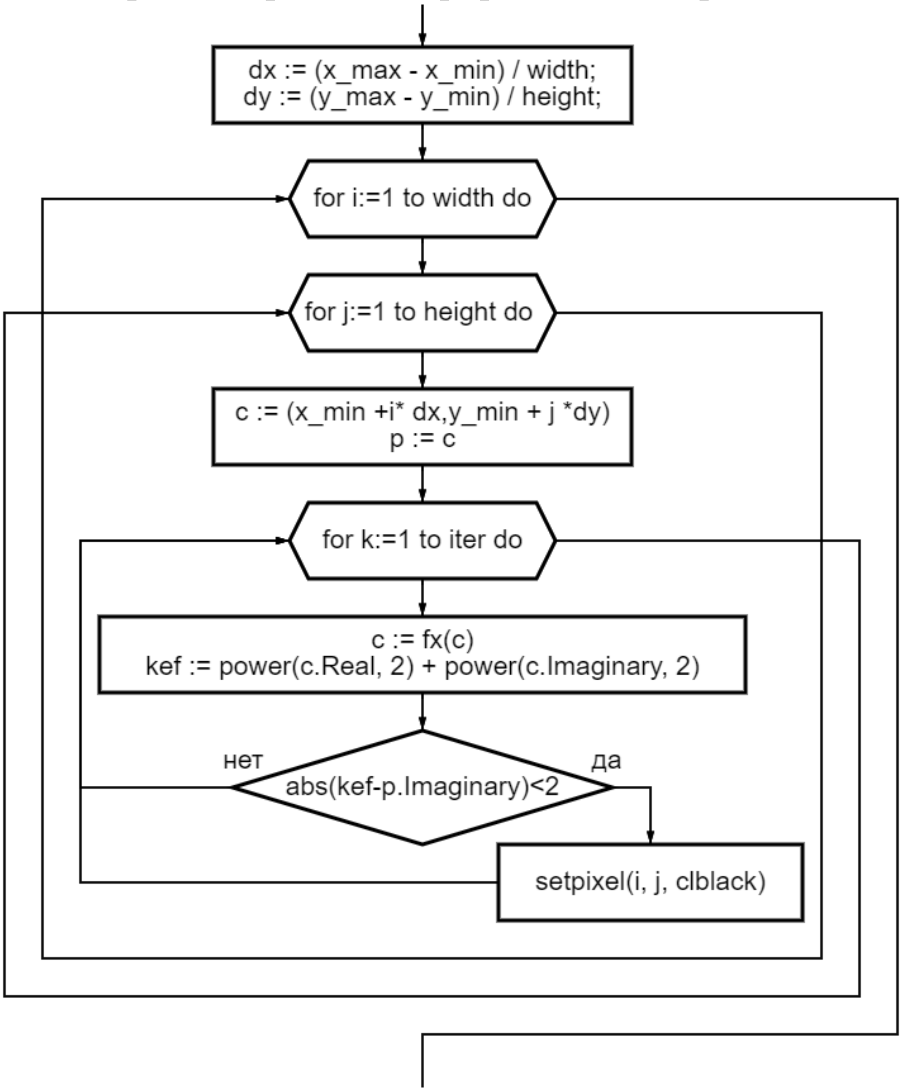

Рис. 2. Фрагмент блок-схемы алгоритма построения заполняющего множества Жюлиа

При изучении данной темы у студентов формируются толерантность к новизне и преодоление стереотипов мышления. Каждый случай таблицы 1 требует своих методов исследования, часто совсем нестандартных.

Таким образом, мы считаем решение подобных задач способствует активному развитию креативности, формирует необходимые креативные качества личности: гибкость мышления, интуицию и др.

Литература

1. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000. 352с.

2. *Минлор Дж.* Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.
3. *Пайтген Х.-О., Ритхер П. Х.* Красота фракталов. М.: Мир, 1993. 176 с.
4. *Секованов В. С.* Элементы теории дискретных динамических систем: Учебное пособие. СПб.: Издательство «Лань», 2017. 180 с.
5. *Секованов В.С.* Элементы теории фрактальных множеств. Учебное пособие. 5-у изд, перераб. и доп. М.:Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 248с.