Шереметьев Р.А.,
Кафедра теоретической информатики и дискретной математики
Институт математики и информатики
Московский педагогический государственный университет
sheremetev.roma01@mail.ru

ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Аннотация: В статье описан процесс создания интерактивных моделей фигурных чисел и рассмотрена возможность использования моделей фигурных чисел на разных уровнях образования.

Ключевые слова: фигурные числа, интерактивная модель, обучение.

Sheremetiev R.A.,
Department of Theoretical Informatics and Discrete Mathematics
Institute of Mathematics and Informatics
Moscow State Pedagogical University
sheremetev.roma01@mail.ru

FIGURATE NUMBERS: THEORETICAL FOUNDATIONS AND EDUCATIONAL APPS

Abstract: The article describes the process of creating interactive models of figurate numbers and considers the possibility of using models of figurate numbers at different levels of education.

Key words: figurate numbers, interactive model, learning.

Понятие фигурное число было впервые употреблено в пифагорейской школе в пятом веке до нашей эры. Фигурное число — это число, которое можно представить правильной дискретной геометрической моделью из точек [1]. Одна точка символизирует число один, две – число два и так далее. Множество точек, содержащее три и более точек можно разместить на плоскости в виде многоугольника. Далее числа представляли в виде объёмных тел. Фигурные числа являются воплощением красивых и привлекательных идей человека о неразрывности числа, то есть плода разума, с материальным миром. Согласно идеям пифагорейцев фигурные числа должны были связать геометрию с арифметикой.

Фигурные числа образовали класс специальных чисел натурального ряда. Большое количество математических фактов может быть сформулировано в терминах теории фигурных чисел. Также этот класс чисел тесно связан с другими классами целых чисел, например, с биномиальными коэффициентами, числами Фибоначчи, числами Ферма и т. д.

Благодаря тому, что фигурные числа были открыты на рассвете математической науки, они являются крайне полезными для обучения детей математике по стопам пифагорейцев, облегчения понимания непростых тем и иллюстрации фактов из школьной программы по арифметике, алгебре и геометрии. Известно, что Мария Монтессори в рамках своей системы развития детей дошкольного возраста применяла бусины, иллюстрирующие числа, для обучения разрядам чисел. Бусины собирались сначала в квадраты на плоскости, после квадраты объединялись в кубы, что соответствует квадратным и кубическим числам. Фигурные числа могут применяться в начальном общем образовании для иллюстрации и облегчения изучения таблицы сложения и умножения, а также для прояснения дополнительных связей между числами для одарённых детей. На ступени основного общего образования фигурные числа могут помочь в усвоении и открытии дополнительных связей внутри таких тем, как теорема Пифагора, треугольник Паскаля, формулы сокращённого умножения. Кроме того, благодаря правилам своего построения, фигурные числа будут замечательной иллюстрацией для арифметической прогрессии. На уровне среднего общего образования формулы фигурных чисел могут быть использованы для изучения доказательства методом математической индукции. Применение фигурных чисел в школе не ограничивается только стандартным курсом математики, для заинтересованных учеников могут быть организованы внеурочные занятия по этой теме.

Использование фигурных чисел в школьной программе обусловлено несколькими моментами. Одним из них является принятый федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования, согласно которому изучение математики в школе должно обеспечить в том числе осознание значения математики в жизни человека, формирование представлений о математике, как универсальном языке науки, развитие представлений о числе и числовых системах [4]. Вторым моментом служит постоянная потребность школы в наглядных, методических, справочных материалах. Наглядное представление фигурного числа и связей между фигурными числами может поспособствовать решению проблем школьников на разных уровнях обучения. Третий момент заключается в том, что в условиях дистанционного обучения крайне необходимы различные способы визуализации изучаемого материала.

Специального сервиса для визуализации фигурных чисел и их свойств в рамках данного исследования обнаружить не удалось, но были найдены ресурсы, которые частично могут выполнить необходимые функции.

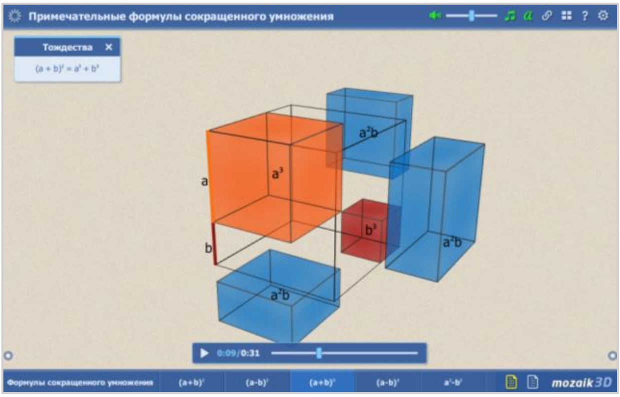


Рис. 1 Модель ресурса «Mozaik education»

Ресурс Mozaik education предлагает готовые видео и 3D-модели по многим предметам и темам из школьного курса, некоторые из них связаны с фигурными числами, но об этом на сайте не упоминается. Существенным недостатком данного ресурса является ограниченность в возможностях пользователя, так как иллюстрации и модели не позволяют изменять параметры. Также Mozaik education распространяется по подписке на определённый тип устройств, что существенно снижает доступность ресурса (рис. 1) [6].

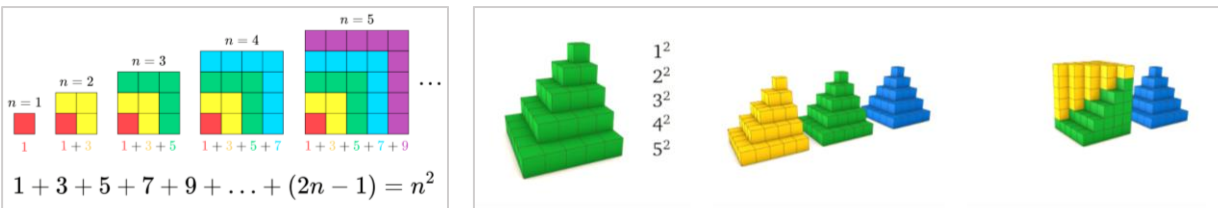


Рис. 2 Модели проекта «Математические этюды»

Проект «Математические этюды», разработанный институтом имени В. А. Стеклова РАН предлагает больший набор моделей, чем Mozaik education. Некоторые модели позволяют менять параметры и просматривать результат. Сайт доступен с любого устройства и распространяется бесплатно. Представленные модели для визуализации используют фигурные числа, но на сайте этот факт не описан (рис. 2) [3].

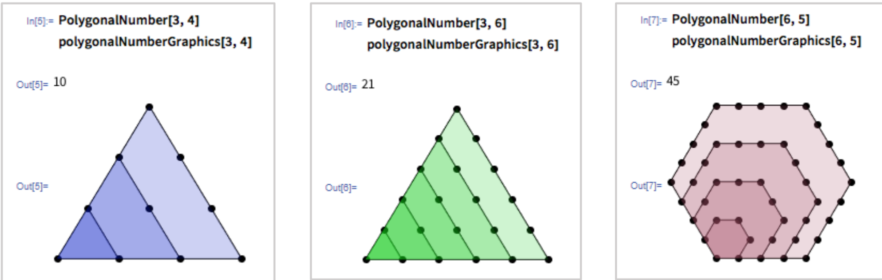


Рис. 3 Реализация фигурных чисел в среде Wolfram

Визуализировать фигурные числа можно в среде Wolfram. Но запись запроса в виде программного кода является сложной для учащихся начальной и средней школы. Кроме того, среда Wolfram не позволяет анимировать и наблюдать связи между фигурными числами (рис. 3) [2].

Математические страницы доктора Рона Нотта посвящены различным разделам школьной и высшей математики. Среди рассмотренных тем есть и фигурные числа (рис. 4). Автор кратко описывает историю фигурных чисел, принцип их получения, примеры использования и предлагает собственные калькуляторы для визуализации фигурных чисел, разработанные на Java Script. Достоинством данного ресурса является наличие теоретического материала и интерактивного калькулятора, позволяющего вводить произвольные параметры. Благодаря тому, что калькуляторы реализованы на Java Script, ресурс имеет высокую доступность с любого устройства. К недостаткам сайта относятся устаревший и нефункциональный дизайн, невозможность наблюдать в динамике свойства фигурных чисел, основной язык страницы — английский [7].

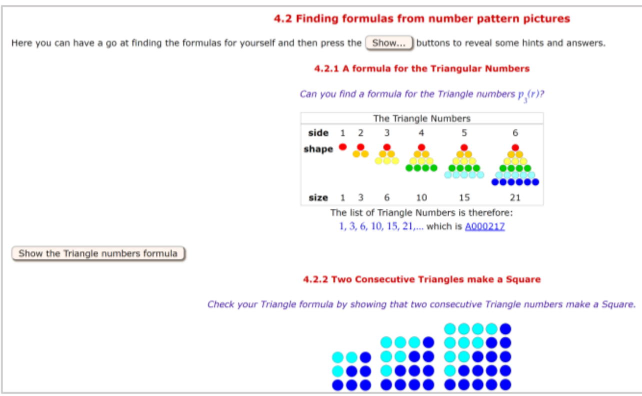


Рис. 4 Математический сайт доктора Рона Нотта

Из проведённого анализа следует необходимость создания альтернативных моделей фигурных чисел, которые бы соответствовали следующим требованиям: финансовая доступность, кроссплатформенность, возможность визуализировать плоские фигурные числа с демонстрацией их свойств, возможность пользователя самостоятельно задавать параметры, простое и понятное управление, выбор языка интерфейса, современный дизайн.

Построение интерактивной модели плоских фигурных чисел

Для выполнения требований, предъявляемых к будущим моделям, в качестве основы была выбрана среда Geogebra - бесплатная кроссплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования.

Для формирования представления у учащихся о фигурном числе и его устройстве интерактивная модель должна обладать возможностью изменения параметров m (количество углов) и n (порядковый номер фигурного числа) в общей формуле фигурного числа.

Модель представляет собой поле с изображением фигурного числа в виде точек, соединённых отрезками, а также с двумя ползунками управления параметрами и формулой, в которой происходит расчёт.

Фигурное число получается посредством расположения точек на координатной плоскости определённым образом. Каждое m -угольное число разбивается на несколько областей с точками. Точки задаются с помощью команды «последовательность», которая зависит от параметра n (рис. 5).

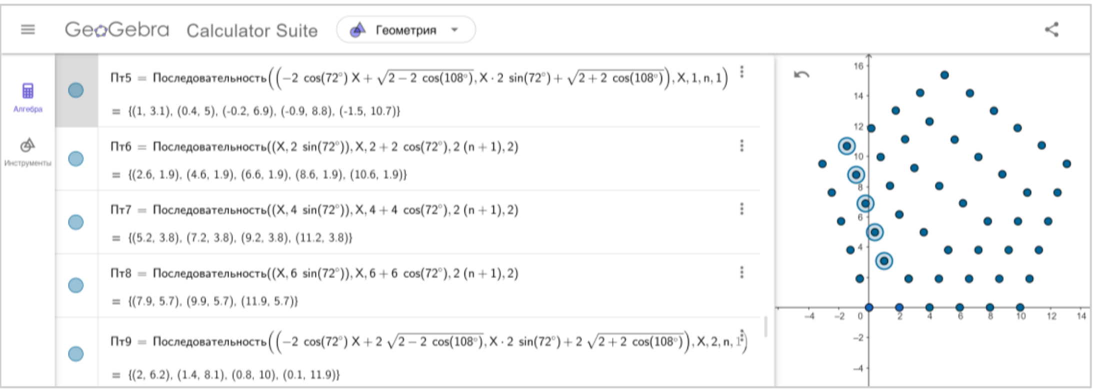


Рис. 5 Последовательности точек, составляющие пятиугольное число

Готовая интерактивная модель представлена на рисунке 6.

Каждая модель, иллюстрирующая свойство фигурного числа расположена на отдельной вкладке ресурса Geogebra, страницы с моделями для удобства объединены в «книгу», специальную форму организации схожих по теме моделей (рис. 7). Ссылка на данную «книгу» приводится на сайте по организации дистанционного и электронного обучения (рис. 8) [5].

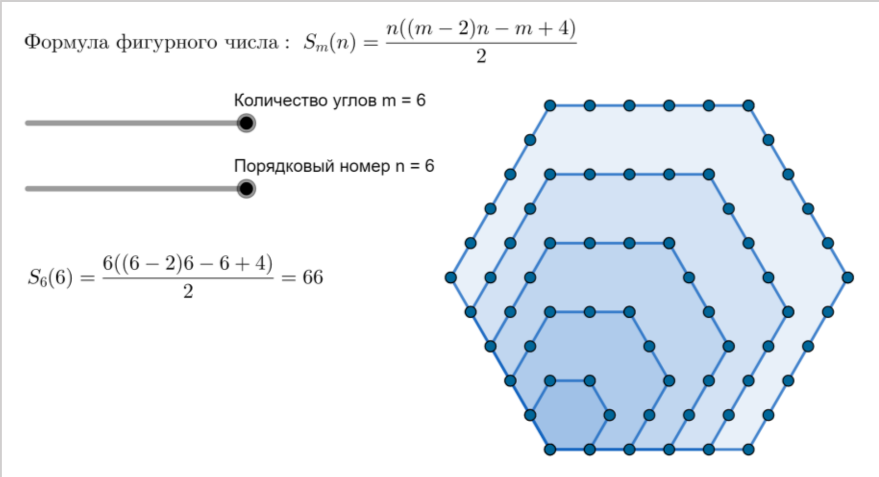


Рис. 6 Интерактивная модель фигурного числа

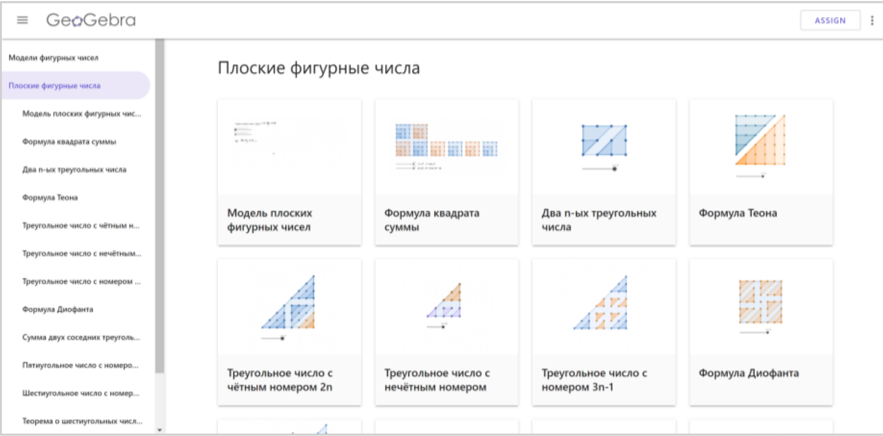


Рис. 7 Книга моделей фигурных чисел на сайте Geogebra

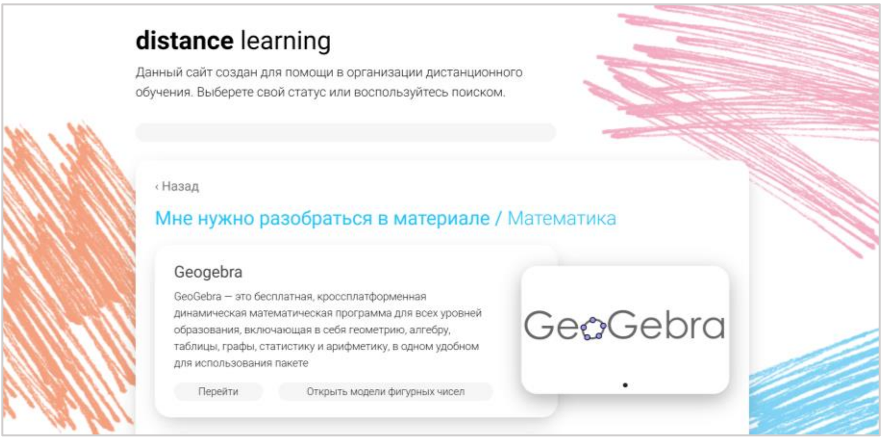


Рис. 8 Сайт для дистанционного и электронного обучения

Применение моделей в образовательном процессе

Интерактивные модели на этапе *среднего общего образования* могут использоваться для изучения следующих тем: множества, функция и способы её задания, последовательности, натуральные и целые числа в задачах из реальной жизни.

На уровне *основного общего образования* модели фигурных чисел будут полезны при обучении таким темам, как: натуральный ряд, делители и кратные числа, разложение числа на множители, многогранники и пространственные тела, формулы сокращённого умножения, последовательности, осевая и центральная симметрия, построение симметричных фигур.

Фигурные числа – самая подходящая иллюстрация для арифметической прогрессии, так как именно формула суммы первых n членов арифметической прогрессии является общей формулой для получения фигурных чисел.

С формулами сокращённого умножения связано множество ошибок у учеников 7 класса, для школьников зачастую остаётся неясным, откуда появляются формулы и чем они принципиально отличаются. Интерпретация этого материала в терминах фигурных чисел облегчает восприятие и способствует усвоению формул.

На рисунке 9 представлена геометрическая иллюстрация формулы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, где $(a+b)^2, a^2, b^2 -$ квадратные числа, а $ab -$ продолговатое число (прямоугольное число). Параметры a и b меняются в пределах от 1 до 4. Формула рядом с ползунками управления параметрами автоматически считает результат. Данная модель включена в книгу моделей фигурных чисел.

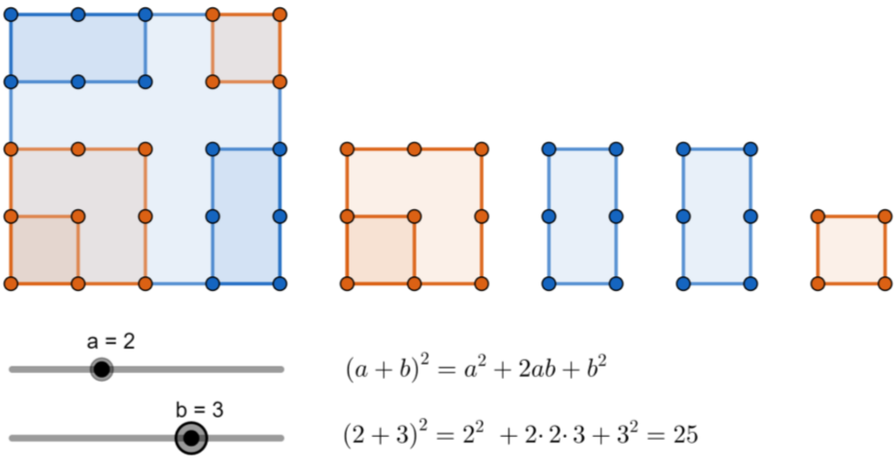


Рис. 9 Геометрическая интерпретация формулы $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$

На этапе *начального общего образования* интерактивные модели можно использовать для изучения следующих тем: числа и арифметические действия над ними, пространственные отношения и фигуры, конструирование геометрических фигур (разбиение фигуры на части, составление фигуры из частей), таблицы сложения и умножения.

На главной диагонали таблицы умножения $(n \times n)$ расположены квадратные числа 1, 4, 9, 16, 25, … Поэтому сумма элементов главной диагонали таблицы (рис. 12) равна 4-пирамидальному числу $S_4^3(n)$.

×	1	2	3	4	5	…	n
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	…	n
2	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	…	$2n$
3	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	…	$3n$
4	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**	…	$4n$
5	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	…	$5n$
…	…	…	…	…	…	…	…
n	n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	…	n^2

Рис. 12 Таблица умножения

Суммы элементов, расположенных на восходящих диагоналях «1», «2, 2», «3, 4, 3», … , являются тетраэдральными числами 1, 4, 10, 20, 35, …

Поэтому сумма всех элементов таблицы умножения $(n \times n)$ есть сумма первых n кубических чисел, то есть: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ или $(S_3(n))^2$[1].

Таким образом, непрерывное использование фигурных чисел на разных этапах школьной программы представляется цельной системой, дополняющей обучение прикладными и межпредметными вопросами математики.

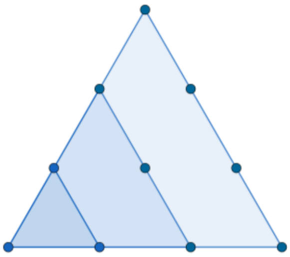
Разработанные модели для визуализации фигурных чисел имеют широкий спектр применения в школьной программе. В рамках отдельно взятой темы они имеют несколько сценариев использования:

1. в качестве вспомогательного объяснительно-иллюстративного материала на уроке математики и информатики;
2. в качестве интерактивной модели для самостоятельной работы на уроке математики;
3. в качестве примера проекта по информатике;
4. в качестве электронного средства обучения для выполнения домашнего задания.

Примеры задач с использованием интерактивных моделей

Задача 1. На интерактивной доске с помощью моделей для визуализации фигурных чисел появляется задание: «Найти *n*-ый член арифметической прогрессии».

Решение.



Найти: a_{52}

$$a_{52} = a_1 + (n-1)d = 1 + (52-1)\cdot 1 = 52$$

Задача 2. Найти сумму конечной арифметической прогрессии 1, 2, 3, …, 98, 99, 100.

Решение:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 \ + \ \ldots + \ 98 + 99 + 100 =$$
$$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51) =$$
$$= 101 + 101 + 101 \ + \ \ldots + \ 101 = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Учителю следует обратить внимание учащихся, что сумма первых *n* натуральных чисел является треугольным числом (представимо в виде треугольника). Поэтому и число 5050 является треугольным, кроме того, число 5050 является половиной произведения двух последовательных чисел 100 и 101.

Задача 3. Бревна на складе укладывают, как показано на рисунке 13. Сколько всего бревен содержится в одной кладке, если ее основание состоит из 12 бревен?

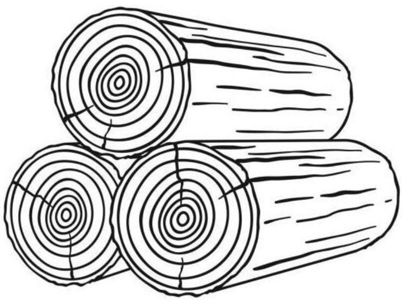


Рис. 13 Иллюстрация к задаче 3

Решение: количество всех бревен есть сумма арифметической прогрессии с первым членом 1 и последним членом 12.

$$S_{12} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{12(1 + 12)}{2} = 78.$$

Результат позволяет убедиться, что треугольное число есть половина произведения двух соседних чисел, в нашем случае 12 и 13.

Задача 4. Одинаковые шары сначала расположили в форме правильного треугольника, а затем — в форме прямоугольника. Найдите количество шаров, если известно, что и на стороне треугольника, и на большей стороне прямоугольника располагается на два шара больше, чем на меньшей стороне прямоугольника.

Решение: пусть на стороне треугольника и на большей стороне прямоугольника располагается x шаров, тогда на меньше стороне прямоугольника – $(x - 2)$ шара. Следовательно, количество шаров, умещающихся в прямоугольник равно $x(x - 2)$. Как уже известно, количество шаров, умещающихся в треугольнике, есть сумма арифметической прогрессии $1, 2, \dots, x$. Найдём эту сумму по формуле.

$$S_x = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{x(1 + x)}{2}.$$

Приравняем результат к количеству шаров, умещающихся в прямоугольнике.

$$\frac{x(1 + x)}{2} = x(x - 2) \Leftrightarrow \frac{1 + x}{2} = x - 2 \Leftrightarrow x = 5.$$

Количество всех шаров равно $5 \cdot 3 = 15$.

Задача 5. С помощью моделей для визуализации фигурных чисел (рис. 14) проверить и доказать утверждение: сумма первых n нечетных чисел равна n^2.

Доказательство:

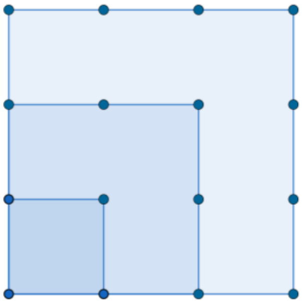


Рис. 14 Иллюстрация к решению задачи 5

Рассмотрим прогрессию нечётных чисел $1, 3, 5, 7, 9 \ldots$ В данной прогрессии $a_1 = 1$, $d = 2$. Используем формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n = \frac{2 \cdot 1 + 2(n-1)}{2}n = \frac{2 + 2n - 2}{2}n = \frac{2n}{2}n = n^2.$$

Список литературы:

1. Деза Е., Деза М. Фигурные числа / Пер. с англ. — М.: МЦНМО, 2015. — 350 с
2. Многоугольные числа // Wolfram Language URL: www.wolfram.com/language/11/algebra-and-number-theory/polygonal-numbers.html.ru (дата обращения: 16.01.2023).
3. Сумма квадратов // Математические этюды URL: etudes.ru/models/sum-of-squares/ (дата обращения: 16.01.2023).
4. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5–9 класс): Приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 г. № 1897 (ред. от 11.12.2020)
5. Шереметьев Р. А. Разработка агрегатора онлайн-ресурсов для дистанционного обучения // "Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе" материалы международной научно-практической интернет-конференции. — М.: МПГУ, 2022.
6. Mozaik education // Mozaik education URL: www.mozaweb.com/lexikon.php?cmd=extra_full&extraid=147927 (дата обращения: 12.04.2023) (дата обращения: 16.01.2023).
7. Polygonal and Figurate Numbers or Numbers as Shapes // Dr Knott's Maths pages URL: fibonacci-numbers.surrey.ac.uk/Figurate/figurate.html (дата обращения: 16.01.2023).