Никитина О.Г.,
Кафедра «Математическое образование»,
Педагогический институт им. В.Г.Белинского,
Пензенский государственный университет,
nikitina1005@mail.ru

О неравенствах в олимпиадных заданиях для школьников

Аннотация: в статье рассматриваются некоторые типы олимпиадных задач для школьников, связанные с неравенствами. Приводится подборка задач для занятия математического кружка по соответствующей теме.
***Ключевые слова*:** олимпиады для школьников, неравенства.

Olga Nikitina,
Department of "Mathematical Education",
Pedagogical Institute named after V.G.Belinsky,
Penza State University,
nikitina1005@mail.ru

About inequalities in Olympiad tasks for schoolchildren

Abstract: he article discusses some types of Olympiad problems for schoolchildren related to inequalities. A selection of tasks for a math class on the relevant topic is given.
Keywords: olympiads for schoolchildren, inequalities.

Олимпиадам разного уровня в нашей стране уделяется большое внимание. Целью любой олимпиады по математике является развитие интереса школьников к овладению математическими знаниями и умениями, а также выявление наиболее одаренных в этой области знаний ребят. Важная особенность многих олимпиадных задач состоит в том, что для их решения не требуется никаких знаний, выходящих за рамки школьной программы. Для решения некоторых задач достаточно смекалки и логики. Для решения других требуется опыт, интуиция, умение рассуждать.

Но вместе с тем, нужны и отработанные методики решения стандартных задач, чтобы их можно было использовать и при решении более сложных задач. Нужны глубокие знания и умение переносить усвоенные приемы решения задач в новые нестандартные ситуации [1-3].

Изучение неравенств, составляет значительную часть школьного курса математики. Часто неравенства встречаются и в олимпиадах для школьников разного уровня сложности. Многие из этих неравенств основаны на неравенстве о средних:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где a, b - положительные числа.

Обобщением этого неравенства занимался французский математик Огюстен Луи Коши (1789-1857 г.). В частности, его имя носит неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_2 a_n},$$

где a_1, a_2,…a_n – положительные числа.

То есть неравенство Коши – это неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел.

Причем равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 =\ldots = a_n$.

Приведем некоторые примеры применения неравенства Коши.

1. Найти наименьшее значение выражения (без использования производной).

А) $x^2 + \frac{2}{x}$, если x - положительное число.

Понятно, что функция легко исследуется на экстремумы на промежутке (0, ∞) с помощью производной. А без использования средств дифференциального исчисления дать ответ на поставленный вопрос поможет неравенство Коши. Причем если применить это неравенство к сумме двух данных слагаемых, то их среднее геометрическое будет содержать переменную x, принимающую значения из бесконечного промежутка (0, ∞). Что не приводит к ответу. Поэтому сначала представим второе слагаемое в виде двух равных слагаемых, и лишь затем применим неравенство Коши:

$$x^2 + \frac{2}{x} = x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 3.$$

Таким образом, для положительных значений x данное выражение не превосходит трех. Причем $x^2 + \frac{2}{x} = 3$ тогда и только тогда, когда $x^2 =$

$\frac{1}{x}$, то есть при $x = 1$. Следовательно, наименьшее значение выражения $x^2 + \frac{2}{x}$ равно трем при $x = 1$.

Б) $3x^3 + \frac{2}{x^2}$, где x - положительное число.

Это задание аналогично предыдущему, но здесь сложнее догадаться, на какие слагаемые разбить данную сумму, чтобы их среднее геометрическое не содержало переменную x. Так как наименьшее общее кратное степеней x равно шести, то должно быть два слагаемых с x^3 и три слагаемых с $\frac{1}{x^2}$, то есть:

$$3x^3 + \frac{2}{x^2} = \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{2}{3x^2} + \frac{2}{3x^2} + \frac{2}{3x^2} \geq$$

$$\geq 5 \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{2}x^3 \cdot \frac{3}{2}x^3 \cdot \frac{2}{3x^2} \cdot \frac{2}{3x^2} \cdot \frac{2}{3x^2}} = 5 \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, $3x^3 + \frac{2}{x^2} \geq 5 \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{3}}$. Причем $3x^3 + \frac{2}{x^2} = 5 \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{3}}$, если $\frac{3}{2}x^3 = \frac{2}{3x^2}$, то есть при $x = \sqrt[5]{\frac{4}{9}}$.

В) $\frac{a^6+b^3+c^2}{abc}$, где a, b, c - положительные числа.

Здесь в выражении присутствуют три переменные, поэтому дифференциальное исчисление функций одной переменной не поможет решить задачу. Оценим числитель данного выражения по неравенству Коши. Но предварительно нужно представить его в виде суммы таких слагаемых, чтобы их среднее геометрическое было бы равно $Cabc$, где C - некоторая постоянная. Старшая степень в числителе у a – шестая. Степени у b и c являются делителями шести. Поэтому перепишем числитель в виде

$$a^6 + b^3 + c^2 = a^6 + \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}c^2$$

и воспользуемся неравенством Коши:

$$a^6 + b^3 + c^2 = a^6 + \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}c^2 \geq$$

$$\geq 6 \cdot \sqrt[6]{a^6 \cdot \frac{1}{2}b^3 \cdot \frac{1}{2}b^3 \cdot \frac{1}{3}c^2 \cdot \frac{1}{3}c^2 \cdot \frac{1}{3}c^2} = 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{a^6b^6c^6}{2^2 \cdot 3^3}} = \frac{6abc}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}}.$$

Тогда

$$\frac{a^6+b^3+c^2}{abc} \geq \frac{6abc}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}\cdot abc} = \frac{6}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}.$$

Причем $\frac{a^6+b^3+c^2}{abc} = \frac{6}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}$ при $a^6 = \frac{1}{2}b^3 = \frac{1}{3}c^2$, то есть если $c = \sqrt{3}a^3$, $b = \sqrt[3]{2}a^2$.

2. Найти все пары чисел x, y из интервала $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения (ДВИ МГУ)

$$\left(\frac{\sqrt{3}siny}{\sqrt{2}\sin{(x+y)}}+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}sinx}{3\sin\ y}+1\right)^2\left(\frac{\sin{(x+y)}}{7\sqrt{3}\sin\ x}+1\right)^4.$$

Понятно, что нужно оценивать сомножители. Причем это нужно сделать так, чтобы при перемножении средних геометрических выражений, стоящих в скобках все синусы сократились бы.

Оценим выражение в первой скобке:

$$\frac{\sqrt{3}siny}{\sqrt{2}\sin{(x+y)}}+1 \geq 2\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{3}siny}{\sqrt{2}\sin{(x+y)}}\cdot 1} = 2\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{3}siny}{\sqrt{2}\sin{(x+y)}}}.$$

Чтобы при оценивании выражения во второй скобке получить в знаменателе $\sqrt{siny}$, перепишем это выражение в виде четырех слагаемых, учитывая, что среднее геометрическое придется возводить в квадрат:

$$\frac{\sqrt{2}sinx}{3\sin\ y}+1 = \frac{\sqrt{2}sinx}{3\sin\ y}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}sinx}{3\sin\ y}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}.$$

Тогда

$$\left(\frac{\sqrt{2}sinx}{3\sin\ y}+1\right)^2 \geq 4^2\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}sinx}{3^4\sin\ y}}.$$

Аналогично будем рассуждать и при оценивании выражения в третьей скобке. Здесь среднее геометрическое придется возводить в четвертую степень. Чтобы получить квадратный корень из $sin(x+y)$ и $sinx$ в среднем геометрическом должен появиться корень восьмой степени. Поэтому раскладываем единицу на семь слагаемых:

$$\frac{\sin{(x+y)}}{7\sqrt{3}\sin\ x}+1 = \frac{\sin{(x+y)}}{7\sqrt{3}\sin\ x}+\underbrace{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{7}}_{\text{семь слагаемых}} \geq$$

$$\geq 8 \cdot \sqrt[8]{\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x} \cdot \underbrace{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{7}}_{\text{семь сомножителей}}}.$$

Тогда

$$\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x} + 1\right)^4 \geq 8^4 \cdot \sqrt{\frac{\sin(x+y)}{7^8\sqrt{3}\sin x}}.$$

С учетом полученных оценок для исходного выражения (обозначим его через A) имеем:

$$A \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3}siny}{\sqrt{2}\sin(x+y)}} \cdot 4^2 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}sinx}{3^4\sin y}} \cdot 8^4 \cdot \sqrt{\frac{\sin(x+y)}{7^8\sqrt{3}\sin x}}.$$

Или, проведя преобразования, получим:

$$A \geq 2 \cdot 4^2 \cdot 8^4 \cdot \sqrt{\frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{7^4}} = \frac{2^{17}}{3^2 \cdot 7^4}.$$

Причем $A = \frac{2^{17}}{3^2 \cdot 7^4}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}siny}{\sqrt{2}\sin(x+y)} = 1, \\ \dfrac{\sqrt{2}sinx}{3\sin y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x} = \dfrac{1}{7}. \end{cases}$$

То есть

$$\begin{cases} \dfrac{siny}{\sin(x+y)} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{sinx}{\sin y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \dfrac{\sin(x+y)}{\sin x} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Решая эту систему и учитывая, что числа x, y могут принимать значения только из интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, получим

$$x = arccos\frac{\sqrt{6}}{3}, y = arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Литература

1. *Егупова М.В.* Как сделать понятным школьнику решение геометрической олимпиадной задачи // Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе: материалы Международной научно-практической интернет-конференции, г. Москва, 18–24 апреля 2022 г. / под ред. Л. Л. Босовой, Д. И. Павлова [Электронное издание сетевого распространения]. – Москва, 2022. С. 423-429.
2. *Никитина О.Г.* Использование технологии диалогового взаимодействия на занятиях математического кружка // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы: материалы XV Международной научно-практической конференции / под общей редакцией М.А. Родионова. Пенза, 2019. С. 130-132.
3. *Никитина О.Г.* Об использовании простейших свойств числовых неравенств в олимпиадных задачах // Педагогический институт им. В.Г.Белинского: традиции и инновации: сб. статей научной конференции, посвященной 83-летию Педагогического института им. В.Г.Белинского Пензенского государственного университета. Пенза, 2022. С. 210-213.