Фролов Д.С.,
студент,
Институт математики и информатики,
Московский педагогический
государственный университет;
dimon_frolov@mail.ru
Научный руководитель:
Фирстова Н.И.,
кандидат педагогических наук,
доцент,
профессор кафедры теории и методики
обучения математике и информатике,
Институт математики и информатики,
Московский педагогический
государственный университет;
steva54@mail.ru

Симметрия в алгебраических системах уравнений

Аннотация: в статье рассматривается понятие симметрии в алгебраических системах уравнений, представлен метод замены переменных, который позволяет понизить степень уравнений, входящих в систему.

Ключевые слова: симметрический многочлен, симметрическая система, метод замены переменной.

Frolov D.S.,
student,
Institute of Mathematics and Computer Science,
Moscow Pedagogical
State University;
dimon_frolov@mail.ru
Firstova N.I.,
Candidate of Pedagogical Sciences,
Associate Professor,
Professor of the Department of Theory and Methods
of Teaching Mathematics and Computer Science,
Institute of Mathematics and Computer Science,

Moscow Pedagogical
State University;
steva54@mail.ru

Symmetry in algebraic systems of equations

Abstract: The article discusses the concept of symmetry in algebraic systems of equations, presents a method for replacing variables, which allows you to lower the degree of equations included in the system.

Keywords: symmetric polynomial, symmetric system, variable replacement method.

Математика выявляет порядок,
симметрию и определенность, а это –
важнейшие виды прекрасного.
Аристотель

При решении задач, предлагаемых учащимся на математических олимпиадах, в ЕГЭ профильного уровня, на вступительных конкурсных экзаменах в высшие учебные заведения, разрешается применять любые известные способы и приемы решения. Знание таких приемов и умение применять их на практике значительно сокращает время на выполнение задания, делает решение рациональным, нестандартным, что является важным условием для последующего изучения высшей математики и свидетельствует о математическом кругозоре старшеклассника.

Способы решения, которые будут рассмотрены в этой статье, применимы к уравнениям и системам уравнений специального вида: в них можно заметить симметрию. Основной метод решения таких систем – метод замены переменной, в котором выделен один из приемов реализации данного метода.

Симметрия в алгебре означает наличие определенного порядка в выражениях, неизменность при каком-либо преобразовании.

Симметрией в алгебре занимались советские математики Н.Я. Виленкин (1920–1991), В.Г. Болтянский (1925–2019) и другие.

Среди многочленов встречаются многочлены, которые не изменяются при перестановке переменных, такие многочлены называются **симметрическими.**

Система уравнений следующего вида

$$\begin{cases} P_1(x,y) = 0, \\ P_2(x,y) = 0. \end{cases}$$

где $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ – симметрические многочлены, называется **симметрической системой уравнений**.

Симметрическая система двух уравнений с двумя переменными решается подстановкой $\boldsymbol{u} = x + y$, $\boldsymbol{v} = xy$. [2, с. 24]

Степени многочленов уменьшаются, т.к. одночлен *xy* второй степени заменяется на одночлен *v* первой степени, и исходная система сводится к более простой системе относительно переменных $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$**.**

Симметрическая система трех уравнений относительно переменных *x, y, z* решается подстановкой

$$x + y + z = \boldsymbol{u}$$

$$xy + xz + yz = \boldsymbol{v}$$

$$xyz = \boldsymbol{w}$$

Если найдены ***u*, *v*, *w***, то для нахождения значений первоначальных переменных *x, y, z* по теореме, обратной теореме Виета, достаточно составить кубическое уравнение

$$t^3 - ut^2 + vt - w = 0,$$

корни которого t_1, t_2, t_3 в различных перестановках являются решениями исходной системы.

При решении симметрических систем уравнений для перехода к новым переменным ***u*** и ***v*** нужно знать формулы сокращенного умножения. Полезно уметь выводить

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^3 - 3(x + y)xy = u^3 - 3uv$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$$

Некоторые задачи школьного курса математики решаются сведением к симметрической системе уравнений. Приведем пример практико-ориентированной задачи, в которой после переформулировки выделяется структура, а затем составляются математические модели.

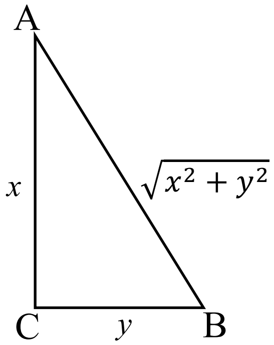
Задача. На территории детского сада планируется обустроить песочницы в форме прямоугольных треугольников площадью 24 м^2, и периметром 24 м. Чему равны длины сторон такой песочницы?

Дано:

ΔABC ($\angle C = 90°$)

$S = 24$ м^2

$P = 24$ м



Найти:

AC, BC, AB - ?

Решение:

Составим математические модели для решения задачи.

Пусть x, y – катеты прямоугольного треугольника AC и BC соответственно, тогда по теореме Пифагора $\sqrt{x^2+y^2}$ – гипотенуза AB

На основании формулы площади треугольника и определения периметра треугольника составим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2+y^2}=24 \\ \dfrac{1}{2}xy=24 \end{cases}$$

Обнаружив, что система является симметрической, для упрощения решения вводим замену $x+y=\boldsymbol{u}$, $xy=\boldsymbol{v}$.

Тогда система относительно $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ примет следующий вид

$$\begin{cases} u+\sqrt{u^2-2v}=24 \\ v=48 \end{cases}$$

После подстановки значения **v** из второго уравнения получим ответ.

Ответ: 6, 8, 10.

Встречаются системы уравнений с симметрическим вхождением слагаемых. Такие системы имеют вид:

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=a, \\ f(x)+h(x)=b, \\ g(x)+h(x)=c \end{cases}$$

Способ решения системы заключается в сложении левых и правых частей, получаем $f(x)+g(x)+h(x)=\frac{1}{2}(a+b+c)$

Затем из данного уравнения поочередно вычитаются третье, второе и первое уравнения системы, в результате чего получается система

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2}(a+b-c), \\ g(x)=\dfrac{1}{2}(a-b+c), \\ h(x)=\dfrac{1}{2}(-a+b+c) \end{cases}$$

Левые части могут представлять собой произведения

$$\begin{cases} f(x)\cdot g(x)=a, \\ f(x)\cdot h(x)=b, \\ g(x)\cdot h(x)=c \end{cases}$$

При решении системы таких уравнений необходимо перемножить левые и правые части уравнений, тогда получаем

$f^2(x) \cdot g^2(x) \cdot h^2(x) = abc$ или

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = \pm\sqrt{abc}$$

Если затем полученное уравнение разделить поочередно на третье, второе и первое уравнения системы,

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{abc}}{c} \\ g(x) = \dfrac{\sqrt{abc}}{b} \\ h(x) = \dfrac{\sqrt{abc}}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = -\dfrac{\sqrt{abc}}{c} \\ g(x) = -\dfrac{\sqrt{abc}}{b} \\ h(x) = -\dfrac{\sqrt{abc}}{a} \end{cases}$$

то получаем две системы уравнений относительно *f(x)*, *g(x)*, h(x) вида

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{\dfrac{ab}{c}} \\ g(x) = \sqrt{\dfrac{ac}{b}} \\ h(x) = \sqrt{\dfrac{bc}{a}} \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = -\sqrt{\dfrac{ab}{c}} \\ g(x) = -\sqrt{\dfrac{ac}{b}} \\ h(x) = -\sqrt{\dfrac{bc}{a}} \end{cases} \quad [2]$$

Решение многих задач элементарной алгебры значительно облегчается, если использовать симметричность условия задачи. Рассмотренные способы и приемы решения систем уравнений формируют умение анализировать, обобщать, конкретизировать. Знание предложенных в статье способов решения систем уравнений полезно учащимся, проявляющим интерес к предмету для углубления и расширения знаний по алгебре.

Литература

1. *Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я.* Симметрия в алгебре. М.: МЦНМО, 2002. 240 с.
2. *Супрун В. П.* Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач. М.: Книжный дом "Либроком", 2009. 268 с.
3. *Фирстова Н. И.* Алгебра. 9 класс. Новые дидактические материалы для углубленного изучения математики. М.: Издательство "Интеллект-Центр", 2020. 64 с.