Тимофеева И. Л.,
доктор педагогических наук, профессор,
профессор кафедры математического анализа,
Институт математики и информатики,
Московский педагогический государственный университет;
iltimofeeva@mail.ru
Хредченко О. В.,
студент 5 курса
Институт математики и информатики,
Московский педагогический государственный университет;
ov_khredchenko@student.mpgu.edu

О логических знаниях и умениях, формируемых при изучении теорем разной логической структуры в углубленном курсе алгебры для 8 класса

Аннотация: в статье проанализирована логическая структура теорем углубленного курса алгебры в 8 классе, указаны логические умения, формируемые у учащихся при изучении теорем в зависимости от их логической структуры.

Ключевые слова: теорема, логическая структура, кванторы, логические умения, углубленного курс алгебры, учащиеся 8 классов.

Timofeeva I. L.,
ScD in Education, Full Professor,
Professor, Mathematical Analysis Department,
Institute of Mathematics and Computer Science,
Moscow Pedagogical State University
iltimofeeva@mail.ru
Khredchenko O.V.,
5th year student,
Institute of Mathematics and Computer Science,
Moscow Pedagogical State University
ov_khredchenko@student.mpgu.edu

About logical knowledge and abilities being formed in while studying theorems of different logical structures in advanced algebra course for 8th grade

Abstract: in article theorem’s logical structure of advanced algebra course for grades 8 was analyzed; student’s logical abilities formed during study of theorems depending on their logical structure are indicated.

being formed in theorems’ while studying depending on their logical structure, were indicated.

Keywords: theorem, logical structure, quantifiers, logical abilities, advanced algebra course, 8th grade students.

Изучение теорем в школьном курсе математики является важной и неотъемлемой частью этого курса. В процессе этого изучения учащиеся испытывают немалые трудности, связанные с недостаточным пониманием смысла теорем и неготовностью к доказательству и использованию теорем при решении задач. Многие из этих трудностей имеют логический характер. Поэтому, прежде чем приступить к доказательству теоремы, следует провести с учащимися определенную работу логического характера, которая в статье [7] названа логическим оперированием теоремами. Цели такой работы:

1. Достижение адекватного понимания *смысла* и правильного *толкования* теоремы.

2. Для приведения теоремы к *форме*, удобной для доказательства этой теоремы, а также удобной для формулировки обратного ей утверждения и его доказательства или опровержения.

Для достижения этих целей необходимо формировать у учащихся определенные логические знания и умения, являющиеся важными компонентами *логической грамотности* учащихся.

Ориентируясь на работу И. Л. Никольской [3], а также на логические знания и умения, перечисленные в работах [4], [5] и [7] выделим и уточним те знания и умения, формирование которых возможно при изучении теорем.

Знания, формирование которых возможно при изучении теорем:

1) знание и понимание возможности опускания внешних кванторов общности в теоремах и недопустимости опускания квантора существования независимо от его вхождения в теорему;
2) знание и распознавание теорем различных видов, определяемые их логической структурой: теоремы об общности, теоремы в условной форме, теоремы-критерии, теоремы о существовании, теоремы о несуществовании, теоремы о существовании и единственности;

3) знание различий между теоремами-свойствами (необходимое условие), теоремами-признаками (достаточное условие) и теоремами-критериями (необходимое и достаточное условие);
4) знание о категорической форме и условной форме теоремы и понимание, в каких случаях целесообразно переходить от одной формы теоремы к другой;
5) знание соглашений о порядке выполнения логических операций в форме логических союзов и частиц, а также кванторных операций;
6) знание определений обратного, противоположного и контрапозитивного утверждений к теореме;
7) знание правил преобразования отрицания сложных предложений с квантором и без квантора;
8) знание, что в теоремах вида «Существует X из M такой, что не верно $P(X)$» и «Для любого X из M неверно $P(X)$» в случае, если множество изменения переменной (множество M) конечно, квантор существования выражается через дизъюнкцию, а квантор общности – через конъюнкцию;
9) знание смысла словосочетаний «хотя бы один из» и «ни один из… не …» в теоремах, в частности знание, что теорема вида «Хотя бы один X из M не обладает свойством $P(X)$» – это теорема существования вида «Существует X из M такой, что неверно $P(X)$», а теорема вида «Ни один из X из M не обладает свойством $P(X)$» – это теорема об общности вида «Для любого X из M не верно $P(X)$»;
10) знание смысла предложений вида «справедливо (в точности) одно из двух утверждений: $P(X)$ или $Q(X)$» и понимание их отличий от предложений вида «$P(X)$ или $Q(X)$», т. е. имеющих логическую структуру $P(X) \vee Q(X)$;
11) знание, какая переформулировка теоремы существования и единственности раскрывает ее смысл и делает удобной для доказательства;
12) знание, что теоремы логической структуры $Q(X) \leftrightarrow R(X)$ можно переформулировать как конъюнкцию двух импликаций.

Здесь и далее всюду подразумеваем, что X – конечное множество переменных по одному или различным множествам.

Уточним, что под умением выявить логическую структуру теорем понимается умение выявить логические союзы и частицы (т. е. логические операции) и кванторные слова или слова и обороты с кванторным смыслом, а также умение определить порядок выполнения соответствующих логических и кванторных операций.

Умения, формирование которых возможно и целесообразно при изучении теорем:

1) умение определить, опущены ли внешние кванторы общности в теореме или нет, и восстановить эти кванторы, если они опущены, а также опустить их в противном случае;
2) умение выявить логическую структуру теорем следующих видов:

a) $\forall X\, P(X)$, где $P(X)$ является предложением вида:
   - $Q(X) \rightarrow R(X)$, где $R(X)$ – предложение, не содержащее внешнего квантора существования, $Q(X)$ – произвольное предложение.
   - $\neg Q(X)$, где $Q(X)$ – предложение без кванторов.
   - $Q(X) \leftrightarrow R(X)$, где $Q(X)$ и $R(X)$ – произвольные предложения.

b) теорем существования видов: $\exists X\, P(X)$, $\forall X\, \exists Y\, S(X, Y)$, $\forall X\, (Q(X) \rightarrow \exists Y\, S(X, Y))$, где $P(X)$, $Q(X)$ и $S(X, Y)$ – произвольные предложения;

3) умение перейти от категорической формы теоремы к условной и наоборот;
4) умение правильного употребления словосочетаний «хотя бы один из» и «ни один из… не …» в теоремах;
5) умение переформулировать теорему с использованием буквенных обозначений переменных в случае, если она сформулирована без буквенных обозначений переменных;
6) умение построить для теоремы в условной или в категорической форме обратное, противоположное и контрапозитивное ей предложения;
7) умение для любого предложения перейти к равносильному ему предложению, в котором отрицание относится только к элементарным предложениям или отсутствует вовсе;
8) умение переформулировать теорему существования и единственности, так, чтобы построенное предложение раскрывало смысл этой теоремы и было удобно для ее доказательства, как это сделано, например, в [6, с. 160];
9) умение переформулировать теорему логической структуры $Q(X) \leftrightarrow R(X)$ в форме конъюнкции двух импликаций.

В результате проведенного анализа логической структуры теорем из учебника «Алгебра: 8 класс» А. Г. Мерзляка и В. М. Полякова [2], предназначенного для углубленного изучения алгебры, можно сделать вывод: каждая теорема имеет одну из представленных ниже логических структур:

1. $\forall X\, P(X)$ или $P(X)$ (с квантором общности или без него), где $P(X)$ – элементарное предложение.
2. $\forall X\, (P(X) \rightarrow Q(X))$ или $P(X) \rightarrow Q(X)$ (с внешним квантором общности или без него).
3. $\forall X\, \exists Y\, S(X, Y)$ – теорема существования.
4. $\neg\exists X\, P(X)$ – теорема о несуществовании, где $P(X)$ – элементарное предложение.
5. $\forall X\, \exists! Y\, S(X, Y)$ – теорема существования и единственности.
6. $\forall X\, (P(X) \leftrightarrow Q(X))$ или $P(X) \leftrightarrow Q(X)$ (с квантором общности или без него).
7. $\forall X\, ((P(X) \vee Q(X))\, \&\, \neg(P(X)\, \&\, Q(X)))$, где $P(X)$ и $Q(X)$ – элементарные предложения.

Рассмотрим ряд примеров теорем из учебника [2] с разной логической структурой. Нумерация приведенных теорем соответствует нумерации предыдущего списка. Для каждой теоремы приведем ее запись с использованием логических символов.

1. «Модуль произвольного числа принимает только неотрицательные значения, т. е. $|a| \geq 0$» [2, с. 209]. Логические операции и кванторы отсутствуют.
2. «Если $a \vdots b$, то $ka \vdots b$» [2, с. 158]. Символически: $a \vdots b \rightarrow ka \vdots b$.
3. «... каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа» [2, с. 230]. Символически: $\forall \alpha \in D\, \exists r \in \mathbf{Q}\ \alpha = r$, где D – множество всех бесконечных периодических десятичных дробей.
4. «…не существует рационального числа, квадрат которого равен 2…» [2, с. 231]. Символически: $\neg\exists a \in \mathbf{Q}\ a^2 = 2$.
5. «Для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r таких, что $a = bq + r$, где $0 \leq r < b$» [2, с. 122]. Символически: $\forall a \in \mathbf{Z}\ \forall b \in \mathbf{N}\ \exists! q \in \mathbf{Z}\ \exists! r \in \mathbf{Z}\ (a = bq + r\ \&\ 0 \leq r\ \&\ r < b)$.
6. «Натуральное число делится нацело на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр его десятичной записи делится нацело на 9» [2, с. 159]. Символически: $\overline{a_1 a_2 \ldots\ a_n} \vdots 9 \leftrightarrow (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \vdots 9$.

7. «Для любого натурального числа n и данного простого числа p справедливо одно из двух утверждений: $n \vdots p$ или НОД(n; p) = 1» [2, с. 145]. Символически:

   $\forall n \in \mathbf{N}\ ((n \vdots p \vee \text{НОД}\,(n; p) = 1)\ \&\ \neg(n \vdots p\ \&\ \text{НОД}(n; p) = 1))$.

Отдельно остановимся на примерах теорем логической структуры $P(X) \rightarrow Q(X)$ (тип 2) с разной логической структурой предложений $P(X)$ и $Q(X)$ и приведем символическую запись этих теорем:

2.1 «Если $a \vdots b$, то $ka \vdots b$» [2, с. 158]. Символически: $a \vdots b \rightarrow ka \vdots b$.

2.2 «Если $a \vdots m$ и $b \vdots n$, то $ab \vdots mn$» [2, с. 158].

Символически: $(a \vdots m\ \&\ b \vdots n) \rightarrow ab \vdots mn$.

2.3 «… (Малая теорема Ферма). Если натуральное число a не делится нацело на простое число p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$» [2, с. 147]. Символически: $\neg(a \vdots p) \rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

2.4 «Если $b \geq 0$ и $a=b$ или $a=-b$, то $|a|=b$» [2, с. 209]. Символически: $(b \geq 0\ \&\ (a = b \vee a = -b)) \rightarrow |a| = b$.

2.5 «Если $|a| = b$, то $b \geq 0$ и $a = b$ или $a = -b$» [2, с.209]. Символически: $|a| = b \rightarrow (b \geq 0\ \&\ (a = b \vee a = -b))$.

2.6 «Если произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ натуральных чисел делится нацело на простое число p, то хотя бы один из множителей $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делится нацело на p» [2, с. 160].

Символически: $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \vdots p \rightarrow (a_1 \vdots p \vee a_2 \vdots p \vee \ldots \vee a_n \vdots p)$.

2.7 Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицательный и $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при всех значениях x. [2, с. 299]. Символически: $(b^2 - 4ac < 0\ \&\ a > 0) \rightarrow \forall x \in \mathbf{R}\ (ax^2 + bx + c > 0)$.

Установим соответствие между логической структурой теоремы и логическими знаниями и умениями, которые следует формировать при ее изучении. Укажем, при изучении теорем какой логической структуры можно формировать перечисленные ранее логические знания и умения.

1. Логические знания и соответствующие умения, связанные с восстановлением или опусканием внешних кванторов общности, можно формировать при изучении практически любой теоремы.
2. Логические знания и соответствующие умения, связанные с распознаванием логической структуры теоремы, можно формировать при изучении любой теоремы. Причем в процессе распознавания

логической структуры условных теорем, в заключении которых присутствует словосочетание «хотя бы один из», кроме всего прочего формируются знания и умения, связанные с правильным употреблением и толкованием этого словосочетания. Кроме того, в процессе распознавания логической структуры теорем, в формулировках которых присутствуют слова «справедливо (в точности) одно из двух утверждений …», можно формировать знания и умения, связанные с правильным употреблением и толкованием смысла таких теорем.

3. Логические знания и соответствующие умения, связанные с распознаванием категорической и условной форм теоремы и переходом от одной из этих форм к другой, можно формировать при изучении теорем в категорической или условной форме.
4. Логические знания и соответствующие умения, связанные с построением для данного предложения обратного, противоположного и контрапозитивного ему предложений, можно формировать при изучении теорем в условной или в категорической форме.
5. Логические знания и соответствующие умения, связанные с построением и преобразованием отрицания данного сложного предложения, можно формировать при изучении теорем в условной или в категорической форме, когда требуется опровергнуть обратное предложение. Кроме того, такие знания и умения целесообразно формировать при работе с противоположным и контрапозитивным предложениями, построенными для теоремы в условной форме.

Выявление логической структуры теорем в примерах 2.1–2.7 необходимо для правильного понимания смысла теоремы. Например, формулировки теорем 2.4 и 2.5 можно понять неоднозначно, если специально не обсудить с учащимися логическую структуру этих теорем.

Таким образом, выбор логических знаний и умений, которые учитель формирует у учащихся во время изучения теорем, в большей степени определяется их логической структурой.

Заметим, что для выявления логической структуры теорем при изучении курса алгебры в 8 классе учитель не может записывать теоремы символически, поскольку логическая символика не используется на уроках математики в основной школе. Это заметно осложняет формирование логических знаний и умений учащихся. Вместе с тем выявление логической структуры теоремы способствует однозначности понимания смысла теоремы. Кроме того, на умении выявлять логическую структуру теорем (в той или иной степени) базируются остальные логические умения, связанные с изучением теорем. Поэтому, даже без использования логической символики, школьников необходимо обучать выявлению логической структуры теорем. Однако логическую символику при записи теорем и определений можно использовать в старших классах при изучении углубленного курса алгебры, а также на курсах по выбору логической тематики. Это значительно облегчит формирование всех логических знаний и умений.

Отметим, что содержание учебника по алгебре 8 класса базового уровня А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонского, М. С. Якира [1] не содержит таких глав, как «Основы теории делимости» и «Неравенства», в которых могло быть представлено большое количество теорем, при изучении которых учитель имеет возможность формировать указанные выше логические знания и умения. Например, отсутствуют теоремы, приведенные в примерах 2, 5–7. Кроме того, теоремы базового курса алгебры 8 класса имеют более простую логическую структуру по сравнению с теоремами углубленного курса. Разумеется, в курсе алгебры базового уровня изучаются теоремы, при изучении которых можно формировать логические знания и умения, однако возможности формирования таких знаний и умений, а значит, и логической грамотности в целом, при освоении углубленного курса значительно шире.

Отметим немалые трудности, которые испытывает учитель при формировании логических знаний и умений учащихся при изучении теорем курса алгебры основной школы. Во-первых, как мы уже отмечали, учитель не может пользоваться символической записью теорем, поскольку логическая символика отсутствует в курсе основной школы. Во-вторых, в основной школе не предусмотрено специальное время для формирования логических знаний и умений учащихся. Учитель вынужден выкраивать это время при изучении программного материала, что осложняет формирование логических знаний и умений учащихся.

При изучении теорем курса алгебры в 8 классе открываются возможности для такого формирования. Эти возможности заметно расширяются, если курс углубленный. Формирование логических знаний и умений при изучении школьного курса математики является хотя и непростой, но очень важной задачей учителя.

Литература

1. *Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.* Алгебра: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Вентана-Граф, 2022. 256 с.
2. *Мерзляк А. Г., Поляков В. М.* Алгебра: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. 2-е издание., стереотип. М.: Вентана-Граф, 2019. 384 с.
3. *Никольская И. Л.* Привитие логической грамотности при обучении математике [Текст]: дис. … канд. пед. наук. М., 1972. 168 с.
4. *Сергеева И. Е*. Формирование логической грамотности математической речи студентов педвуза при изучении вводного курса математики [Текст]: автореф. дис. …канд. пед. наук. М., 2011. 23 с.
5. *Тимофеева И. Л.* О логических компетенциях студентов математических факультетов педвузов // Школа Будущего. 2017. № 4. С. 255–265.
6. *Тимофеева И. Л., Сергеева И. Е., Лукьянова Е. В.* Вводный курс математики: учебное пособие для студентов учреждений высшего педагогического профильного образования. М.: Издательский центр «Академия», 2011. 240 с.
7. *Тимофеева И. Л., Сергеева И. Е.* О логическом оперировании математическими теоремами и определениями // Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе: материалы международной научно-практической интернет-конференции, Москва, МПГУ, 18–24 апреля 2022 г. / под ред. Л. Л. Босовой, Д. И. Павлова [Электронное издание сетевого распространения]. М.: МПГУ, 2022.