

Умственные навыки, необходимые для изучения математики

Александр Васильевич Боровик

Манчестерский Университет, Англия

МПГУ, Москва, 19 апреля 2021

Несколько слово о себе

- ▶ Преподаю математику, в разных формах, с 1975 года.
- ▶ Преподавал в России, с 1990 – в США, Англии, Турции.
- ▶ В Манчестере, более 10 лет – на Подготовительном Отделении: до 400 студентов со всего мира (много китайских); британские – не изучали или завалили математику в старшей школе.
- ▶ Учил студентов всего спектра способностей.

Я буду говорить о проблемах, существенных для всех индустриально развитых стран.

Полный цикл воспроизведения математики

школа → универ → подготовка учителей → снова школа

США, Англия, Турция: **никто** не смотрит на цикл в целом.

Как правило, цикл разорван и дисфункционален.

Навыки

- ▶ Слово «навыки» подчеркивает их **приобретенный характер**.
- ▶ Имеются в виду навыки, которые очень желательно развить на каком-то этапе изучения математики, чтобы успешнее двигаться дальше.
- ▶ Навык – это

склонность
готовность
способность
интерес

} к определенным подходам к математике.

Я приведу только один пример. Он даже не упоминаются в английской системе образования.

Видение мира

Игорь Владимирович Арнольд (1900–1948) :

20 задач, решающихся действием $3 - 1 = 2$

1. Мне дали три яблока, я съел одно из них. Сколько осталось?
2. Трёхметровым шестом нащупали дно, причём над уровнем воды остался 1 м. Какова глубина?
3. Таня сказала: у меня на 3 брата больше, чем сестёр. На сколько в Таниной семье братьев больше, чем сестёр?
4. Час назад поезд должен был прибыть на станцию. Но он опаздывает на 3 часа. Когда он прибудет?
5. Сколько распилов надо сделать, чтобы распилить бревно на 3 части?

И т.д. . .

Видение мира

Эти задачи о совершенно разных отношениях между объектами реального мира, величинами, количествами.

И.В. Арнольд:

Обучение арифметике включает в качестве одного из основных элементов воспитание

умения ориентироваться в различных по своей конкретной природе взаимоотношениях между величинами.

Видение мира

И.В. Арнольд формулировал как одну из задач обучения:

воспитание умения ориентироваться в различных по своей конкретной природе взаимоотношениях между величинами.

Это только первый шаг более серьезной задачи:

воспитание умения видеть математические структуры мира.

Позже, «мир» станет не только социальным и физическим, но и математическим.

Видение мира

И.В. Арнольд:

Самый метод «арифметического решения задачи» отличается от алгебраических приёмов в первую очередь тем,

что на всех стадиях рассуждения все сопоставления и производимые действия

допускают совершенно наглядное и конкретное, осмысленное в области тех величин, о которых идёт речь, истолкование.

Видение мира

Вадим Андреевич Крутецкий (1917–1991) выделял:

... склонность находить логический и математический смысл во многих явлениях действительности и осознавать их в плане
логических и математических категорий.

«Простая» математика

Израиль Моисеевич Гельфанд (1913–2009):

Всегда начинай с рассмотрения самого простого примера – но выжимай из него все до капли.

- ▶ «Простые» определения, рассуждения, вычисления – это те, где все промежуточные структуры и значения имеют непосредственный смысл в уже освоенной, ставшей своей, части математического мира.
- ▶ Это как в арифметике по Арнольду, но только «арифметика» более высоких уровней.

Математика для всех

И.М. Гельфанд:

Математику могут понимать кто угодно, даже алкаши на скамейке возле вино-водочного, надо только правильно с ними разговаривать.

Если их спросить: что больше, $\frac{2}{3}$ или $\frac{3}{4}$ – они пошлют тебя подальше.

А если спросить, что лучше, 2 бутылки на 3-их или 3 на 4-ых, они сразу ответят – конечно, 3 на 4-ых!

Медианта

Если $a, b, c, d > 0$ и

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d},$$

то

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

В примере Гельфанда:

$$\frac{2}{3} < \frac{2+1}{3+1} < \frac{1}{1}.$$

Роль ИТ

Было когда-то в выпускном классе, 1950-е – ранние 1960-е:

"Получить решение в виде удобном для логарифмирования"

Роль ИТ

Было когда-то в выпускном классе, 1950-е – ранние 1960-е:

"Получить решение в виде удобном для логарифмирования"

Надо будет, еще при переходе от арифметики к алгебре :

"Получить решение в виде удобном для программирования"

Роль ИТ

Было когда-то в выпускном классе, 1950-е – ранние 1960-е:

"Получить решение в виде удобном для логарифмирования"

Надо будет, еще при переходе от арифметики к алгебре :

"Получить решение в виде удобном для программирования"

Программирование – на специальном игрушечном языке вроде SCRATCH – **объектно-ориентированный язык (все: объекты)**, хорош для малышей. Для алгебры нужен простой язык **функционального программирования (все: функции)**.

Задача с сайта Khan Academy

Гульнаре нужно получить в 7 тестах в среднем по 78 очков. В первых 6 тестах она получила в среднем по 87 очков. Сколько очков ей еще надо набрать в последнем тесте?

Подсказки на сайте Khan Academy:

- Средняя оценка в первых 6 тестах равна 87, поэтому получено $6 \times 87 = 522$ очков.
- Если Гульнара получит x очков в 7-м тесте, ее средняя оценка за 7 тестов будет

$$\frac{522 + x}{7}.$$

- Это среднее должно быть равно 78, поэтому

$$\frac{522 + x}{7} = 78$$

- $x = 24$.

Решение стариным русским «методом вопросов»

1. Сколько всего очков надо получить Гульнаре?

$$7 \times 78.$$

2. Сколько очков у нее уже было?

$$6 \times 87.$$

3. Сколько очков ей надо получить в последнем тесте?

$$7 \times 78 - 6 \times 87.$$

Решение «сверху вниз»

1. А что это значит, «еще надо»?

Разница между тем, что надо, и тем, что уже было. Это уже можно записывать как переменные:

$$\text{ЕщеНадо} = \text{ЧтоНадо} - \text{УжеБыло}$$

2. И сколько это, «что надо»?

$$\text{ЧтоНадо} = \text{НадоВСреднем} \times \text{НадоТестов}$$

3. И сколько «уже было»?

$$\text{УжеБыло} = \text{БылоВСреднем} \times \text{БылоТестов}$$

И вот код для решения любой задачи такого типа, надо только добавить операторы ввода-вывода:

$$\text{ЕщеНадо} = \text{НадоВСреднем} \times \text{НадоТестов} - \text{БылоВСреднем} \times \text{БылоТестов}$$

Экономия мышления

Моё выступление близко связано со статьей:

A. V. Borovik, *Economy of thought: a neglected principle of mathematics education*, in **Simplicity: Ideals of Practice in Mathematics and the Arts** (R. Kossak and Ph. Ording, eds.). Springer, 2017, pp. 241 – 265. <http://bit.ly/293orpk>

Мои статьи про математическое образование собраны тут:

- ▶ <http://www.borovik.net/selecta/about/>
- ▶ <http://www.borovik.net/selecta/my-papers/>