Корчажкина О.М.,
Институт кибернетики и образовательной информатики,
ФИЦ «Информатика и управление» РАН;
olgakomax@gmail.com

Интерактивные способы представления параметров динамических систем на фазовой плоскости

Аннотация*:** в статье описывается способ математического моделирования объекта, поведение которого может быть представлено системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Математическая модель выступает в виде фазового портрета динамической системы, построенного на фазовой плоскости в программной среде ***PhaPl. В силу доступности для понимания подобный алгоритм может быть рекомендован для освоения на уроках математики в профильных классах средней школы как один из вариантов использования интерактивных инструментов ИКТ, визуализирующих абстрактные категории дифференциальных уравнений в курсе «Алгебра и начала математического анализа».

***Ключевые слова*:** дифференциальные уравнения; динамическая система; фазовая плоскость; фазовый портрет; особая точка; седло; сепаратриса

Olga Korchazhkina,
Institute for Cybernetics and Informatics in Education,
FRC “Computer Science and Control” of the RAS;
olgakomax@gmail.com

Interactive Methods to Represent Parameters of Dynamical Systems on the Phase Plane

Abstract: the article describes a method for mathematical modeling of an object which behaviour can be represented with a system of two first-order ordinary differential equations. The mathematical model looks like the phase portrait of a dynamical system built on the phase plane in the *PhaPl* software environment. Due to its ease of understanding, such an algorithm can be recommended in specialized Math lessons for high school students mastering in the course “Algebra and beginning analysis” as one of the options for using interactive ICT tools that visualize abstract categories of differential equations.

***Keywords*:** differential equations; dynamical system; phase plane; phase portrait; equilibrium point; saddle; separatrix

Необходимость и возможность получения начальных сведений о дифференциальных уравнениях и навыках их решения в профильном курсе математики учащимися старшей школы довольно часто поднимается в методической литературе по вопросам обучения математике (см., например, обзор литературы в [4]). Авторы этих источников указывают, что «полноценное изучение дифференциальных уравнений в школе проблематично как с точки зрения психологии, так и с точки зрения методики преподавания математики» [4, с. 42-43].

Однако в школьных учебниках «Алгебра и начала математического анализа» для профильных 10-11 классов существуют разделы, посвящённые решению обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка, а также типовые физические задачи, в которых моделируются ситуации, приводящие к дифференциальным уравнениям: на нахождение законов горизонтального движения тела по его скорости или ускорению; закона движения пули, выпущенной вертикально вверх с заданной скоростью; определение температуры тела при нагревании или охлаждении; изменение массы радиоактивного вещества от скорости распада во времени; моделирование процесса гармонических колебаний подвешенного на пружине груза; моделирование процесса размножения бактерий; протекание жидкости сквозь отверстие заданного размера [1, с. 305-310; 5, с. 202-211]. Подобные примеры, показывающие насколько широко применяются дифференциальные уравнения для решения практических задач из разных предметных областей, формируют у учащихся представление о прикладном характере математической науки не только на элементарном уровне, но и применительно к моделированию реальных процессов, происходящих в окружающем мире.

Описание с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, а также систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, более сложных процессов в физических (механических, термодинамических, электро- и радиотехнических), биологических, медицинских, логистических, астрономических и других прикладных задачах, можно найти, например, в [2]. В этой работе подчёркивается, что дифференциальное уравнение является не только одним из основных математических понятий, но и служит инструментом построения дифференциальных моделей, помогающих исследовать эволюцию явлений, наблюдаемых в живой и неживой природе.

Прикладное значение дифференциальных уравнений особенно возрастает в современных условиях конвергенции наук и технологий. Их повсеместное использование в смежных областях знаний служит целям построения дифференциальных моделей сложных динамических систем, определению их параметров и закономерностей поведения в зависимости от начальных условий, воздействия внутренних или внешних факторов: характера и траекторий движения объектов, скорости изменения параметров, устойчивых и неустойчивых состояний равновесия и пр.

Понятие *динамическая система* входит в перечень «больших идей» содержания общего среднего образования, поскольку отражает повсеместно встречающиеся в окружающем мире процессы эволюции, которые с помощью различных средств наглядности поддаются визуализации. Помимо этого, образовательная универсальность «больших идей» заключается в том, что при их изучении решается комплексная учебная задача, принимающая определённые черты в зависимости от содержания каждого понятия. Так, для усвоения концепта *динамическая система* решаются следующие задачи:

1) *мировоззренческая задача*, направленная на формирование у школьника представления о динамической системе как математической абстракции для описания процессов и механизмов эволюции в природе и обществе, расширяющей образ единой картины мира;

2) *понятийная задача*, отражающая специфические черты динамической системы и её связи с родственными и альтернативными понятиями – типами особых точек (ОТ), состоянием равновесия, устойчивостью/неустойчивостью, бифуркацией, а также понимание связи между аналитическим и графическим способами описания поведения автономных динамических систем – с помощью систем линейных дифференциальных уравнений и построения фазового портрета (ФПр);

3) *метапредметная задача*, способствующая развитию математического мышления через визуально-аналитические способы анализа поведения динамических систем на фазовой плоскости (ФПл).

Подобный подход помогает решить не только предметные и метапредметные задачи, но и через понимание содержания мировоззренческой составляющей способствует преодолению психологического барьера, который возникает у школьника при встрече с пугающе незнакомыми терминами, объектами и операциями над ними, что препятствует выполнению активных учебных действий.

Исследование поведения динамической системы, описываемой системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, допускающих качественное исследование с помощью метода

ФПл, следует отрабатывать пошагово и иллюстрировать на соответствующих типах ОТ в процессе решения конкретных систем дифференциальных уравнений. Для успешного решения подобных задач учащиеся должны уметь проводить операции с матрицами и знать способы нахождения корней квадратного уравнения. Кроме того, в качестве подготовительных действий для построения ФПр учащиеся знакомятся с понятиями ФПл, ФПр, типами ОТ, траекториями движения системы вблизи ОТ, устойчивыми/неустойчивыми равновесными состояниями системы, физическим смыслом характеристических чисел и собственных векторов системы[1], что становится вполне посильным материалом для освоения учащимися 10-11 классов, если его воссоздать в наглядной форме.

Во второй версии ФГОС С(П)ОО представлена единая предметная область «Математика и информатика», изучение которой 1) в области математики: ориентировано на сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления; сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат; 2) в области информатики: ориентировано на владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач; владение опытом построения и использования компьютерно-математических моделей, проведения экспериментов с помощью компьютера, интерпретации результатов, получаемых в ходе моделирования реальных процессов; умение оценивать числовые параметры моделируемых объектов и процессов [8, с. 22-25].

Таким образом, умение моделировать реальные процессы с помощью дифференциальных уравнений и их визуализация с применением средств ИКТ соответствует целям обучения математике и информатике, что в корне отличается от более узкого подхода, когда изучение дифференциальных уравнений в старшей школе сводится к автоматизированным способам их решения с помощью компьютерных технологий [3].

Приведём пример построения ФПр линейной системы дифференциальных уравнений на ФПл, имеющей одну ОТ, характеризующую состояние равновесия системы. В качестве

---

[1] Базовые понятия по одиночным обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) и системам ОДУ первого порядка приведены в [6, http://mathbio.ru/glossary/def.pdf].

технологического аппарата используем свободное программное обеспечение ***PhaPl*** для автоматического построения и исследования ФПр автономных динамических систем на плоскости [7; 9].

Хотя возможности программной среды ***PhaPl*** позволяют в автоматическом режиме находить все параметры системы двух линейных дифференциальных уравнений, необходимые для построения ФПр, на начальном этапе с целью более глубокого понимания связей между элементами системы необходимо научиться совершать все аналитические операции и вычисления «вручную», а также уметь прорисовывать все разновидности траекторий движения системы в окрестностях ОТ.

Итак, дана система двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \qquad (1)$$

которая имеет одну ОТ как единственное решение при нулевых значениях производных $\dot{x}$ и $\dot{y}$, расположенное в начале координат на ФПл: (0; 0).

Для наглядности дальнейших рассуждений представим эту систему в виде конкретного примера, положив $a = -2$, $b = 5$, $c = 1$ и $d = 2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y \\ \dot{y} = \quad x + 2y. \end{cases} \qquad (2)$$

Собственные значения системы (1), или характеристические числа $\lambda_{1,2}$, устанавливающие тип ОТ на ФПл, находим как корни уравнения, получаемого из соответствующего определителя системы:

$$det\,(A - \lambda\, I) = 0, \qquad (3)$$

где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – квадратная матрица коэффициентов линейных уравнений системы (1), а $I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица-столбец. Тогда уравнение (3) примет вид: $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$ и для системы уравнений (2) при $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ может быть записано как

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & 5 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Характеристические числа системы (2) являются корнями квадратного уравнения, полученного из (4):

$$(-2-\lambda)(2-\lambda) - 5 = 0,$$

и соответствуют ОТ типа «седло», поскольку $\lambda_{1,2} = \pm 3$, а их произведение $\lambda_1 \bullet \lambda_{,2} < 0$.

Для анализа изменения параметров системы (2) с точкой равновесия типа «седло», необходимо найти собственные векторы системы (обозначим их через $\boldsymbol{V_{1,2}}$), задающие направление сепаратрис седла – интегральных прямых, проходящих через седловую точку равновесия, к которым асимптотически стремятся ветви гиперболических фазовых траекторий системы на ФПл. Количество сепаратрис как скалярных объектов совпадает с количеством характеристических чисел. Если рассматривать сепаратрисы в векторном представлении, то их число удваивается: для $\boldsymbol{\lambda < 0}$ обе сепаратрисы направлены к седловой точке равновесия, то есть являются устойчивыми, а для $\boldsymbol{\lambda > 0}$ – исходят из седловой ОТ, то есть позиционируются как неустойчивые.

Собственные векторы представляются в виде матриц-столбцов, причём каждый из них соответствует характеристическому числу $\boldsymbol{\lambda_{1,2}}$ с тем же индексом. Поэтому, зная значения собственных векторов, можно найти уравнения для сепаратрис.

Элементы матриц собственных векторов

$$\boldsymbol{V_1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V_{11}} \\ \boldsymbol{V_{21}} \end{pmatrix} \text{ для } \boldsymbol{\lambda_1} \text{ и } \boldsymbol{V_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V_{12}} \\ \boldsymbol{V_{22}} \end{pmatrix} \text{ для } \boldsymbol{\lambda_2}$$

определяются как корни уравнений с известными $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{\lambda_{1,2}}$:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_1}\,\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{V_1} = \boldsymbol{0} \text{ и } (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_2}\,\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{V_2} = \boldsymbol{0}. \tag{5}$$

Представляя уравнения (5) в матричной форме, получаем:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a - \lambda_1} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d - \lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{V_{11}} \\ \boldsymbol{V_{21}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{6}$$

$$\text{и} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a - \lambda_2} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d - \lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{V_{12}} \\ \boldsymbol{V_{22}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}. \tag{7}$$

Подставляя в уравнения (6) и (7) значения коэффициентов системы (2) и проводя соответствующие преобразования, для каждого значения характеристических чисел $\boldsymbol{\lambda_{1,2}}$ получаем по два равнозначных уравнения, задающих один и тот же собственный вектор, что позволяет в реальных расчётах рассматривать только одно уравнение для каждого характеристического числа:

1) для $\boldsymbol{\lambda_1} = +3$ имеем: $\quad -5\boldsymbol{V_{11}} + 5\boldsymbol{V_{21}} = \boldsymbol{0}$ (6.1)

или $\boldsymbol{V_{11}} - \boldsymbol{V_{21}} = \boldsymbol{0}$; (6.2)

2) для $\boldsymbol{\lambda_2} = -3$ имеем: $\quad \boldsymbol{V_{21}} + 5\boldsymbol{V_{22}} = \boldsymbol{0}$ (7.1)

или $\boldsymbol{V_{21}} + 5\boldsymbol{V_{22}} = \boldsymbol{0}$. (7.2)

Это замечательное свойство собственных векторов, соответствующих одному и тому же характеристическому числу, называется коллинеарностью. Геометрически оно означает их параллельность или расположенность на одной прямой, а с алгебраической точки зрения каждый из собственных векторов может быть представлен бесконечным множеством матриц-столбцов $\boldsymbol{V}$, отличающихся постоянным коэффициентом при элементах этих матриц. Например, для собственного вектора $\boldsymbol{V_1} = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}$ справедливо множество матриц-столбцов с ненулевым коэффициентом $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2V_{11} \\ 2V_{21} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3{,}8V_{11} \\ 3{,}8V_{21} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 10{,}5V_{11} \\ 10{,}5V_{21} \end{pmatrix}; \dots\dots\dots \begin{pmatrix} NV_{11} \\ NV_{21} \end{pmatrix} \right\}, \text{ где } N \neq \boldsymbol{0}.$$

Свойство коллинеарности собственных векторов системы упрощает поиск уравнений для сепаратрис седла: если положить $\boldsymbol{V_{21}} = \mathbf{1}$ и $\boldsymbol{V_{22}} = \mathbf{1}$, то для системы уравнений (2) имеем: $\boldsymbol{V_1} = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{V_2} = \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, тогда выражения для прямых, совпадающих с сепаратрисами, можно найти по формулам: $\boldsymbol{y_1} = \dfrac{x}{V_{11}}$ и $\boldsymbol{y_2} = \dfrac{x}{V_{12}}$, которые справедливы для ненулевых значений коэффициентов при $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0}$ ***и*** $\boldsymbol{d \neq 0}$.

Для системы уравнений (2) сепаратрисы представляют собой линейные функции $\boldsymbol{y_1 = x}$ при $\boldsymbol{\lambda_1 = +3}$ и $\boldsymbol{y_2 = -\,0{,}2x}$ при $\boldsymbol{\lambda_2 = -\,3}$. Соответствующий ФПр системы, полученный в программной среде ***PhaPl***, изображён на рис. 1.

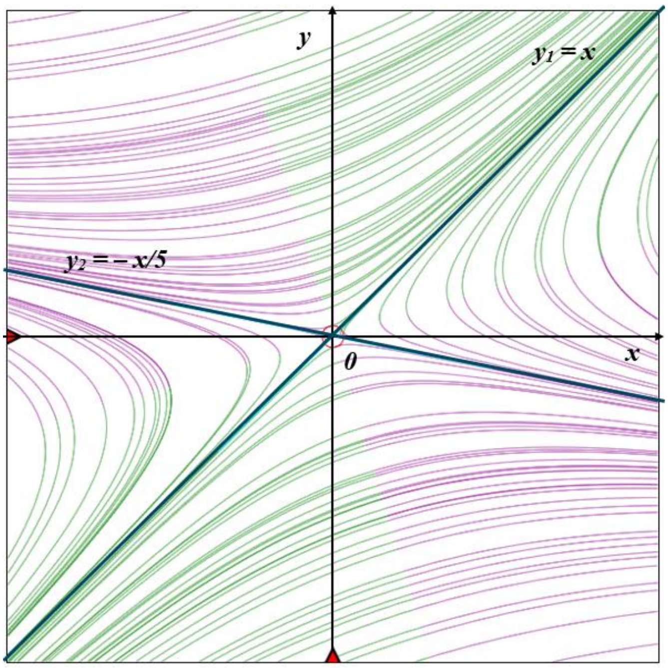


Рис. 1. Фазовый портрет системы линейных дифференциальных уравнений (2), построенный с помощью программы ***PhaPl***

Рассмотрим ещё один пример построения ФПр линейной системы дифференциальных уравнений, представляющей собой частный случай системы (1) при $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = 3y \end{cases} \qquad (8)$$

и проследим, как изменится поведение сепаратрис седла.

Характеристические числа системы: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, тип ОТ – «седло» с координатами (0; 0). Найдём собственные векторы системы:

1) для $\lambda_1 = 3$ имеем: $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0$, откуда получаем только одно уравнение: $-4V_{11} + 2V_{21} = 0$; полагая $V_{21} = 1$, определяем: $V_{11} = 0{,}5$ и $V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; тогда уравнение первой сепаратрисы $y_1 = 2x$;

2) для $\lambda_2 = -1$ имеем: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0$, откуда $2V_{22} = 0$ или $4V_{22} = 0$, а $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; это означает, что $V_{22} \neq 1$, и второй сепаратрисой является ось x: $y_2 = 0$.

Соответствующий фазовый портрет системы, полученный в программной среде ***PhaPl***, изображён на рис. 2.

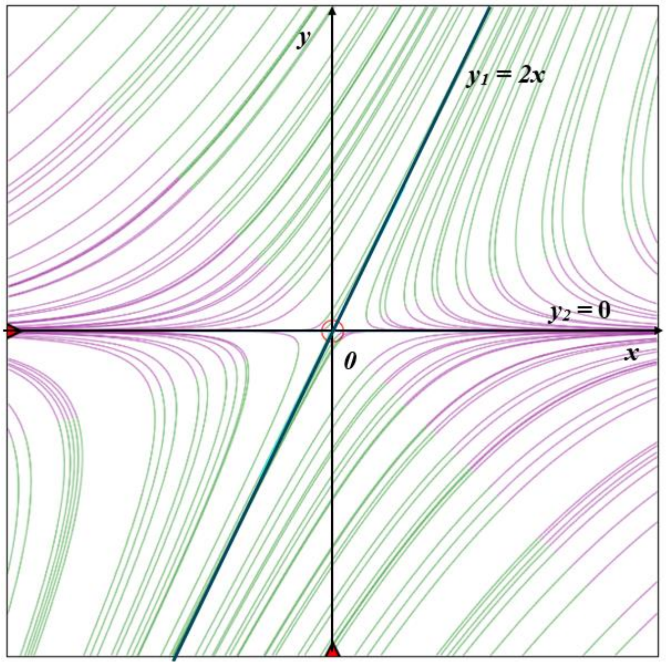


Рис. 2. Фазовый портрет системы линейных дифференциальных уравнений (8), построенный с помощью программы ***PhaPl***

Построим ещё один ФПр с ОТ типа «седло» с координатами (0; 0) для системы уравнений (1) с $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases} \quad (9)$$

Характеристические числа системы: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Найдём собственные векторы системы:

1) для $\lambda_1 = 3$ имеем: $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{pmatrix} = 0$, откуда $-4V_{11} = 0$ или $V_{11} = 0$; полагая $V_{21} = 1$, имеем $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; это означает, что первой сепаратрисой является ось y: $x_1 = 0$;

2) для $\lambda_2 = -1$ имеем: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0$, откуда получаем только одно уравнение: $V_{12} + 4V_{22} = 0$; при $V_{22} = 1$ имеем значение $V_{12} = -4$, тогда $V_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, а уравнение второй сепаратрисы $y_2 = -\frac{x}{4}$

Соответствующий фазовый портрет системы, полученный в программной среде ***PhaPl***, представлен на рис. 3.

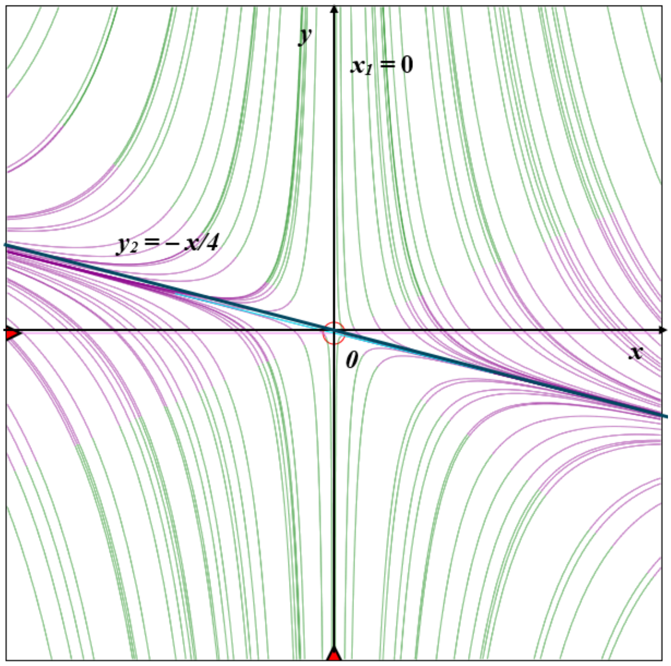


Рис. 3. Фазовый портрет системы линейных дифференциальных уравнений (9), построенный с помощью программы ***PhaPl***

Работа в классе по изучению поведения динамической системы, которая описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, может быть организована в соответствии с этапами, представленными в табл. 1.

Таблица 1

Этапы организации учебно-познавательной деятельности учащихся по изучению поведения динамических систем на фазовой плоскости с использованием средств ИКТ

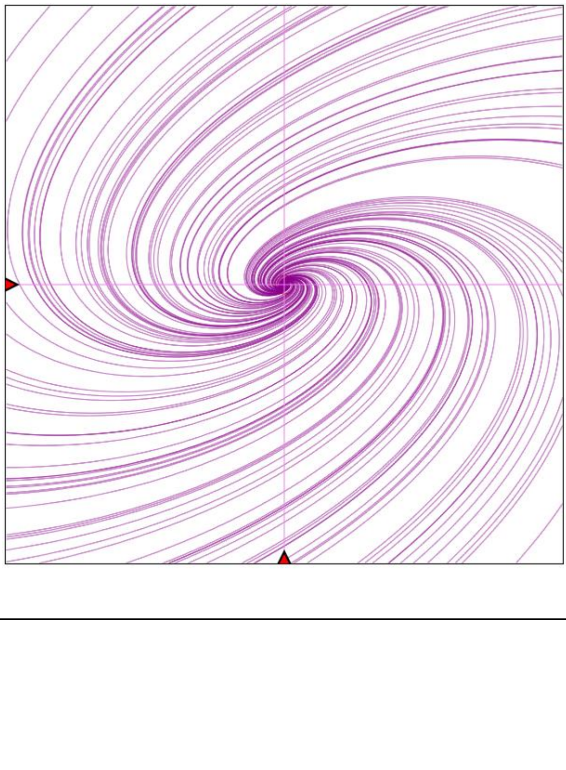
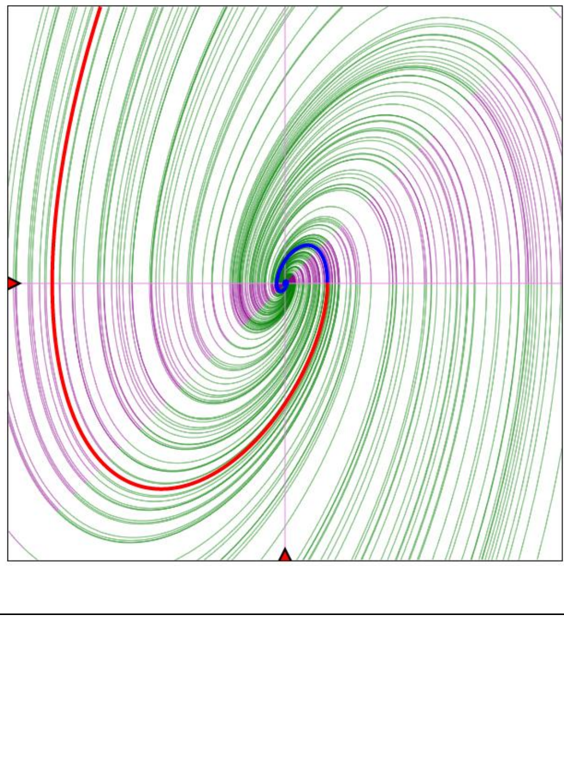
Этап деятельности	Содержание этапа
Цель деятельности	Усвоение понятия *динамическая система* на примере автономных систем, описываемых системой двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.
Подготовительные этапы (решение подготовительных задач)	1) Понятие *динамической системы* как «большой идеи» школьного образования. 2) Сопоставление трёх образовательных задач при изучении *динамических систем*: мировоззренческой, понятийной и метапредметной. 3) Виды динамических систем в естественно-научных и социо-гуманитарных областях знаний. 4) Примеры динамических систем в физике, описываемых дифференциальными уравнениями. 5) Правила работы в программной среде ***PhaPl***.
Основные этапы (решение основной задачи)	1) Системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка: основные понятия, виды, способы решения. 2) Понятие и параметры ФПл и ФПр динамической системы. 3) Выбор способов построения ФПр. 4) Алгебраические и визуальные стратегии, способы, инструменты (алгоритмы) моделирования поведения динамических систем. 5)Решение конкретных задач с помощью выбранных алгоритмов.
Анализ результатов решения задачи	1) Сравнение полученных результатов решения задачи с эталоном. 2) Анализ связи между представлением поведения динамической системы в алгебраической форме и на ФПл. 3) Анализ связи между параметрами системы дифференциальных уравнений (характеристическими числами, особыми точками, собственными векторами) и компонентами ФПр (координатами и типом ОТ,

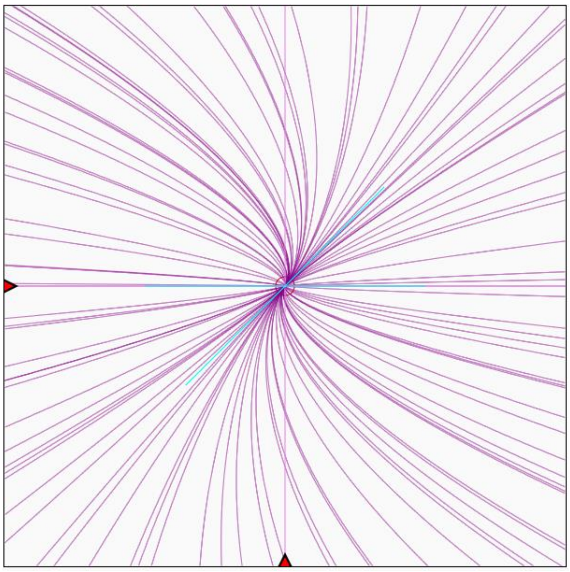
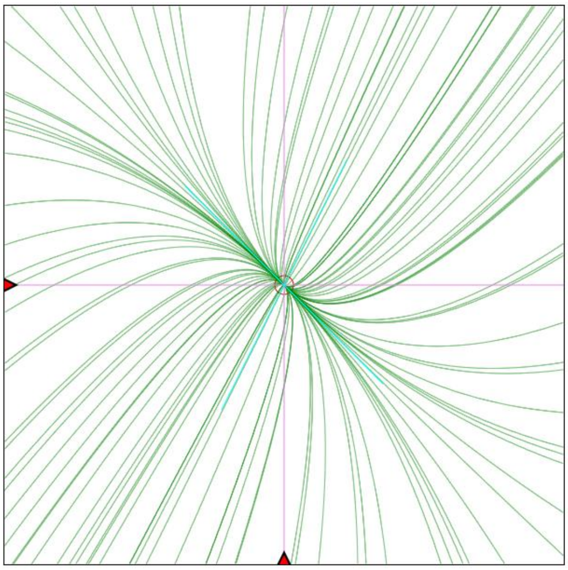
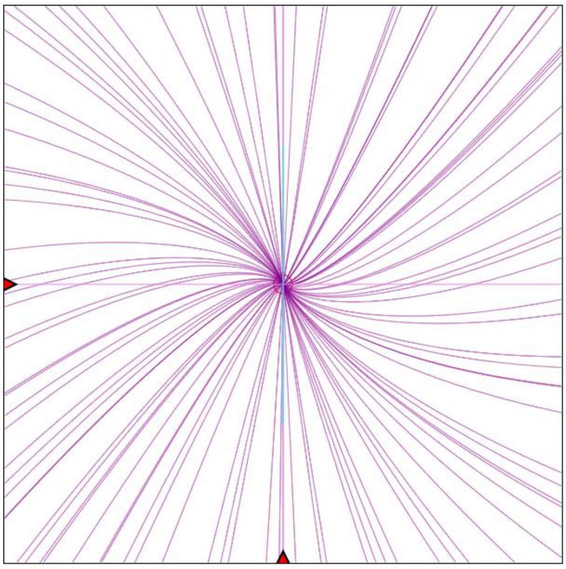
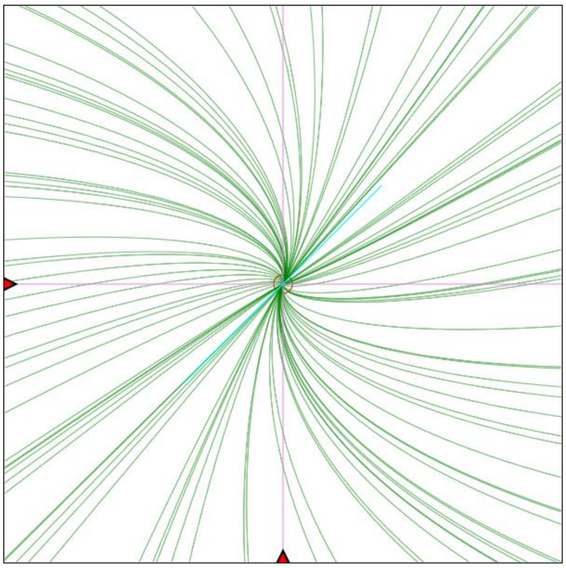
	их устойчивостью, видом и направлением фазовых траекторий).
«Обратная связь»	1) Обсуждение трудностей, анализ и коррекция ошибочных решений. 2) Анализ возможных причин, приводящих к системным/случайным ошибкам или нерациональным способам решения задачи. 3) Анализ преимуществ и недостатков выбранной стратегии, способов и инструментов решения задачи. 4) Предложения по изменению стратегии, способов и инструментов решения задачи (в случае необходимости).

В качестве дополнительных примеров, демонстрирующих возможности программной среды ***PhaPl***, можно построить ФПр с другими типами ОТ (табл. 2), которые может иметь динамическая система, описываемая системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (1).

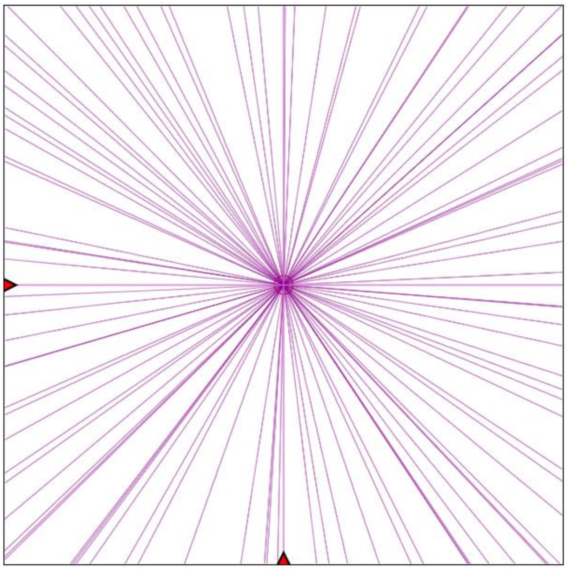
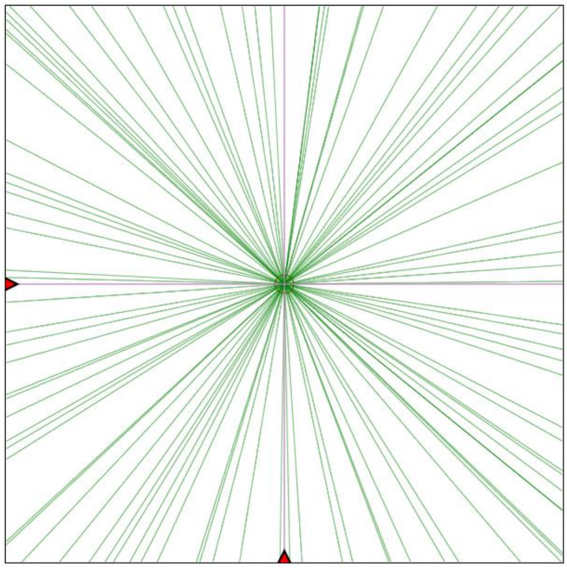
Таблица 2

Построение фазовых портретов линейных автономных динамических систем в программной среде *PhaPl*

$\dot{x} = -x - 5y$ $\dot{y} = 2x - 3y$	$\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$	$\dot{x} = 2y$ $\dot{y} = -5x + 3y$	$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{31}}{2} i$
ОТ – устойчивый фокус		ОТ – неустойчивый фокус	
			

$\dot{x} = -4x + y$ $\dot{y} = -3y$ $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -3$	$V_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\dot{x} = 4x + y$ $\dot{y} = 2x + 5y$ $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6$	$V_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$
ОТ – устойчивый узел		ОТ – неустойчивый узел	
			
$\dot{x} = -4x$ $\dot{y} = -x - 4y$ $\lambda_{1,2} = -4$	$V_{1,2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\dot{x} = 6x - y$ $\dot{y} = x + 4y$ $\lambda_{1,2} = 5$	$V_{1,2} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
ОТ – устойчивый вырожденный узел[2]		ОТ – неустойчивый вырожденный узел	
			

[2] Вырожденный узел – ОТ типа «узел» линейной динамической системы с равными характеристическими числами и совпадающими собственными векторами.

$\dot{x} = -3x$ $\dot{y} = -3y$	$\lambda_{1,2} = -3$	$\dot{x} = x$ $\dot{y} = y$	$\lambda_{1,2} = 1$
ОТ – устойчивый дикритический узел[3]		ОТ – неустойчивый дикритический узел	
			

Описанный в статье визуальный способ представления системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с помощью средств ИКТ знакомит учащихся с алгоритмом моделирования реальных эволюционных процессов на фазовой плоскости. В силу своей наглядности алгоритм построения фазового портрета динамической системы в программной среде ***PhaPl*** позволяет рассматривать понятия математического анализа не как абстрактные и трудные для понимания категории, а как «живой» интерактивный инструмент, доступный для использования старшеклассниками на уроках математики и информатики.

Список литературы

1. *Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И.* Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2007. 384 с.
2. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: ЛЕНАНД, 2021. 206 с.
3. *Карпенко М.Н.* Изучение дифференциальных уравнений в старшей школе при помощи компьютерных технологий. Дипломная работа. а

[3] Дикритический узел – ОТ типа «узел» линейной динамической системы с нулевыми значениями коэффициентов ***b*** и ***c*** соответствующей системы дифференциальных уравнений.

правах рукописи. Ялта: Крымский гуманитарный университет, 2007. 61 с. URL: https://www.docsity.com/ru/izuchenie-differencialnih-uravneniy-v-starshey-shkole-pri-pomoshchi-kompyuternyh-tehnologiy/1109552/ (дата обращения 12.11.2020).

4. *Лагутинская А.И., Бочарова О.Е.* Дифференциальные уравнения в углублённом курсе алгебры и начал математического анализа средней школы // Актуальные исследования в области математики, информатики, физики и методики их изучения в современном образовательном пространстве: результаты исследований в области методики изучения математики, информатики и физики при реализации программ основного общего и среднего общего образования, среднего профессионального образования. Сборник статей. Том. Выпуск 3. Курск: Курский государственный университет, 2018. 86 с. С. 42-46. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_35408220_36093575.pdf (дата обращения 12.11.2020).
5. *Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В*. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и проф. уровни. М.: Просвещение, 2009. 464 с.
6. *Ризниченко Г.Ю.* Математические модели в биологии: курс лекций. URL: http://mathbio.ru/ (дата обращения 12.11.2020).
7. *Черепанов А.А.* Веб-приложение PhaPl для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2018. Т. 24. № 3. С. 41-52. URL: https://journals.ssau.ru/index.php/est/article/view/6452 (дата обращения 12.11.2020).
8. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования / М-во образования и науки Рос. Федерации. М.: Просвещение, 2013. 63 с.
9. PhaPl: Phase Plane Helper. URL: https://phapl.github.io/ (дата обращения 10.11.2020).